مرجع: نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن، تألیف Lin&Lin، ترجمه عمید رسولیان

سرفصل: منطق، مجموعه‌ها، رابطه و تابع، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، عدد اصلی

هدف درس: صحیح استدلال کردن به علاوه
- خوب خواندن
- خوب نوشتن
- خوب صحبت کردن
- خوب دیدن

Home: http://www.um.ac.ir/~moslehian

تا درس را هیچ چیز را نفهمیده، رد نشوم.
همه چیز را با دقت بخوانم و بفهمم.
زیاد مطالعه کنم

مستثنای الا (سوره عصر ۳) دارد: تقوا و عمل صالح

گزاره‌ها:
- ساده = جمله اسنادی = موضوع + محمول + فعل اسنادی
  هوا سرد است.
- غیرساده (مرکب) متشکل از گزاره‌های ساده که با رابطه‌های منطقی و، یا، ... به هم مربوط شده‌اند

if and only if = iff

اگر و فقط اگر = اگفقگ

مبانی ریاضیات — فصل اول: منطق ریاضی

① حساب گزاره‌ها
② حساب محمولات

تعریف: «گزاره» جمله‌ی خبری است که یا راست است یا دروغ باشد. هر چند که برای ما معلوم نباشد که راست است یا دروغ.

مثلاً «e^{π} عدد گنگ است» گزاره می‌باشد در حالیکه «عجب خانه‌ی زیبایی!» گزاره نیست.

اگر گزاره‌ای راست باشد، می‌گوئیم ارزش (راستی) آن T (۱) و در غیر این صورت F (۰) است. منظور ما از «متغیر گزاره‌ای»، حروف p، q، ... است که برای نمایش گزاره‌های دلخواه بکار می‌روند.

گاهی تعداد متناهی گزاره را همراه واژه‌هایی موسوم به «رابط» طبق قواعد معین به دنبال هم می‌آورند (گزاره مرکب).

ما رابط‌های منطقی را بصورت روبرو معرفی می‌کنیم:

p	$\sim p$ (نقیض)
T	F
F	T

$\sim p$: p نه

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\veebar q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T
		ترکیب عطفی	ترکیب فصلی	ترکیب فصلی انحصاری	ترکیب شرطی	ترکیب دوشرطی
		p و q	p یا q	یا p یا q	اگر p آنگاه q	p اگر و فقط اگر q

تعریف: هر عبارتی که از متغیرهای گزاره‌ای p، q و ... بکمک بکارگیری مناسب رابط‌ها، گزاره‌ای ساخته می‌شود را یک ترکیب منطقی یا فرمول می‌نامیم. بطور دقیق‌تر:

(۱) همه متغیرهای گزاره‌ای فرمول هستند (۲) اگر A و B دو فرمول باشند آنگاه $\sim A$ ، $A\wedge B$ ، $A\vee B$ ، $A\veebar B$ ، $A\Rightarrow B$ و $A\Leftrightarrow B$ نیز فرمول هستند (۳) فقط عبارت‌هایی فرمول هستند که با استفاده از (۱) و (۲) بدست آیند.

تعریف: (i) فرمول $q\Rightarrow p$ را «عکس» فرمول $p\Rightarrow q$ می‌نامیم (ii) فرمول $\sim q\Rightarrow \sim p$ را «عکس نقیض» فرمول $p\Rightarrow q$ می‌نامیم.

(iii) p مگر آنکه q به معنای $\sim q\Rightarrow p$ است.

مثال: «او را نمی‌بخشم مگر آنکه عذرخواهی کند» یعنی «اگر عذرخواهی نکند او را نمی‌بخشم» (مقدم / تالی)

(iv) فرمول $\sim q\Leftrightarrow \sim p$ را «عکس نقیض» فرمول $p\Leftrightarrow q$ می‌نامیم.

(v) لفظ «ولی» در ترکیب دو گزاره از جنبه منطقی در حکم «و» است.

تعریف: دو ترکیب منطقی را «هم‌ارز» خوانیم هرگاه آن دو از متغیرهای یکسانی تشکیل شده باشند بدین معنی که اگر یکی درست باشد دیگری نیز درست باشد و اگر یکی نادرست باشد دیگری هم نادرست باشد. مثلاً $(p\Rightarrow q)$ و $(\sim p\vee q)$ هم‌ارز هستند.

تعریف: (i) یک ترکیب منطقی (فرمول) را «راستگو» گوییم هرگاه ارزش آن مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همواره راست باشد. مثلاً: $\sim p\vee p$

(ii) یک ترکیب منطقی (فرمول) را «تناقض» گوییم هرگاه ارزش آن مستقل از ارزش مؤلفه‌هایش همواره دروغ باشد. مثلاً: $\sim p\wedge p$

مثال) $p\ ,\ q\ ,\ p\wedge q\ ,\ \cancel{p\Rightarrow qq)}\ ,\ (p\Leftrightarrow q)\vee(\sim p)\ ,\ \sim\sim q\ ,\ \cancel{\Rightarrow\sim p}$

همه فرمولند.

مثال) از راستگو و دروغگو

قیاس استثنایی

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge p$	$[(p\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	$\boxed{0}$	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

همیشه راستگو

تناقض

p	$\sim p$	$\sim p\wedge p$
1	0	0
0	1	0

دروغگو

مثال برای هم‌ارزی‌ها)

$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$ (قانون دمورگان)

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

p: علی در کنکور قبول شده است

تمرین) q: علی خوشحال است

فرمول‌های زیر را ترجمه کنید:

$\sim p\vee q\ ,\ \sim p\Rightarrow q$

$2<3 \Rightarrow 2\leq 3$

تمرین: ثابت کنید فرمولهای زیر راستگو هستند:

(i) $p \Rightarrow (p\vee q)$ قانون جمع (ادخال فاصل)

(ii) $p\wedge q \Rightarrow p$ قانون اختصار (حذف عاطف)

(iii) $[(p\vee q)\wedge \sim p] \Rightarrow q$ قیاس (منفصله)

(iv) $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)] \Rightarrow [(p\vee r)\Rightarrow(q\vee s)]$
$[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)] \Rightarrow [(p\wedge r)\Rightarrow(q\wedge s)]$
(قیاس ذوالوجهین موجب)

(v) $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)] \Rightarrow [(\sim q\vee\sim s)\Rightarrow(\sim p\vee\sim r)]$
$[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)] \Rightarrow [(\sim q\wedge\sim s)\Rightarrow(\sim p\wedge\sim r)]$
(قیاس ذوالوجهین منفی)

(vi) $[(p\Rightarrow q)\wedge p] \Rightarrow q$ قیاس استثنائی (قانون انتزاع)

(vii) $[(p\Rightarrow q)\wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ قیاس رفع (قانون نقیض انتزاع)

تعریفات: (i) یک گزاره شرطی همیشه درست را یک "استلزام" (منطقی) می‌گویند به عبارت دیگر اگر $p\Rightarrow q$ راستگو باشد آنرا یک استلزام می‌نامند. عکس یک استلزام ممکن است استلزام نباشد.

(ii) یک گزاره دوشرطی همیشه درست را یک هم‌ارزی (منطقی) می‌گویند به عبارت دیگر اگر $p\Leftrightarrow q$ راستگو باشد آنرا یک هم‌ارزی می‌خوانند و در این صورت می‌نویسند $p\equiv q$

۱

تمرین: فرض کنید p، q و r متغیر گزاره‌ای باشند، هم‌ارزی‌های ذیل را ثابت کنید:

(i) $p\wedge q \equiv q\wedge p$ ، $p\vee q\equiv q\vee p$ جابجایی

(ii) $p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$ ، $p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r$ شرکت‌پذیری

(iii) $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ ، $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ (پخشی)

(iv) $\sim(\sim p)\equiv p$ قانون نقض مضاعف (نفی مضاعف)

(v) $p\vee p\equiv p$ ، $p\wedge p\equiv p$ قانون خودتوانی

(vi) $p\wedge(p\vee q)\equiv p$ ، $p\vee(p\wedge q)\equiv p$ قانون (جذب)

(vii) $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q\Rightarrow\sim p)$ قانون عکس نقیض

(viii) $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$ ، $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ قانون دمورگان

(ix) $[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ (قانون تعدی)

(x) $[p\Rightarrow(q\Rightarrow r)]\equiv[(p\wedge q)\Rightarrow r]$

تعریف: استنتاج به مفهوم نتیجه‌گیری است بدین معنا که از فرمولهای مفروض با استفاده از دستورهای معینی که بنام قوانین خوانده می‌شوند فرمول دیگری را نتیجه می‌گیریم.

قرارداد: هرگاه فرمولهای مفروض $p_1, p_2, \ldots, p_n$ و q فرمولی که نتیجه شده باشد، می‌نویسیم: $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$

تعریف: استنتاج $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$ معتبر است اگر و فقط اگر فرمول زیر یک راستگو باشد:

$(p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n)\Rightarrow q$

مثال: استنتاج زیر معتبر است؟ $(\sim p\Rightarrow q)$ و $\sim q \vdash p$ (بنابه قانون نقیض انتزاع)

۱ $(p\Rightarrow q)\equiv\sim p\vee q$

$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\sim p\vee q)$ به عبارت دیگر

راستگو

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p\vee q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

p	q	$p\Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

تعریف. استنتاج فرمول B از فرمول‌های $A_1, \dots, A_n$ معتبر است ($A_1, \dots, A_n \vdash B$) هرگاه فرمول $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow B$ راستگو باشد.

چون $(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 \equiv A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)$، می‌توانیم پرانتزها را حذف کنیم.

مثال ۱) استنتاج روبرو معتبر است $(p \Rightarrow q, p) \vdash q$

زیرا $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ راستگو است.

قیاس استثنایی

مثال ۲) استنتاج $p \vdash p \vee q$ معتبر است زیرا

ادخال فاصل

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

راستگو

تعریف. یک استنتاج متشکل از گزاره‌ها معتبر است هرگاه نمونه‌ای از یک قالب استنتاجی معتبر باشد.

اگر دیوار موش داشته باشد (p) آنگاه موش گوش دارد (q)

موش گوش ندارد ($\sim q$)

∴ دیوار موش ندارد ($\sim p$)

مثال ۳) آیا استنتاج روبرو معتبر است؟

$p \Rightarrow q$	p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1

A_1: اگر ۲ زوج باشد آنگاه ۳ فرد است (p ، q)

A_2: ۳ فرد است (q)

B: ۲ زوج است

$\therefore p$

مثال ۴) آیا استنتاج روبرو معتبر است؟ خیر

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge q$	$[(p\Rightarrow q)\wedge q]\Rightarrow p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	$\boxed{0}$
0	0	1	0	1

قالب استنتاجی مربوطه معتبر نیست.

p: آبادان شهری از جمهوری ایران است

q: و رودخانه ... جمهوری ...

آبادان شهری از جمهوری ایران است $\therefore p$

مثال ۵) آیا استنتاج روبرو درست است؟

$$\frac{p\wedge q}{\therefore p}$$

بلی زیرا قالب استنتاجی معتبر

تحقیق می کند

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

راستگو

آنچه در معتبر بودن استنتاج $(A_1,\dots,A_n)\vdash B$ مهم است این است

که فرض درست بودن $A_1,\dots,A_n$ ، درست بودن B را نتیجه دهد.

A_1	A_2	...	A_n	B	$(A_1\wedge\dots\wedge A_n)\Rightarrow B$
1	0			0 یا 1	
1	1		1	$\boxed{1}$	1

شیء در اصطلاح منطق اعم است از هر چیزی: ذهنی، عینی، زنده، غیر زنده و ... (۳)

حساب محمولات

تعریفات: (i) در هر مبحثی، گروه افراد اولیهٔ موضوع بحث را **عالم سخن** می‌خوانند. مثلاً در حساب مقدماتی، عالم سخن مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

(ii) ثابت به معنی اسم خاص است. «**اسم خاص**» در اصطلاح ما اعم است از (الف) اسم خاص به معنی دستوری، یعنی کلمه یا علامتی که بر فرد مشخصی دلالت می‌کند (ب) شرح مشخص، یعنی ترکیبی از کلمات یا علاماتی که فردی را مشخص می‌سازند. مانند: "۵"، "پنج" و "پایتخت ایران"، "نسبت محیط دایره به قطر آن".

(iii) **متغیر**، حرف یا علامتی است که برخلاف اسم خاص، اسم فرد معینی نیست، بلکه اسم مبهمی است برای هر یک از افراد مجموعهٔ معینی از اشیاء. این مجموعه را دامنهٔ متغیر (یا دامنهٔ متغیر) می‌نامند.

(iv) **گزاره‌نما** یعنی عبارتی مشتمل بر یک یا چند متغیر که با تبدیل کردن این متغیر یا متغیرها (تبدیل جمیع موارد هر متغیر در سراسر آن عبارت به یک اسم خاص) به نام یا اسامی خاص اشیاء معین (اعضای دامنهٔ متغیرها) مبدل به گزاره شود. مانند: x عددی زوج است. گزاره‌نماها را با $F(x)$، $G(x,y)$، ... نمایش می‌دهند.

(v) **اسم‌نما**، عبارتی است مشتمل بر یک یا چند متغیر که با تبدیل کردن این متغیر یا متغیرها به اسم یا اسامی خاص اشیاء معین، مبدل به اسم خاص بشود.

مانند: پدر x

(vi) همهٔ اعضای دامنهٔ متغیر که جانشین متغیر شده، گزاره‌نما را به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌نمایند، مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که به نام مجموعهٔ جواب خوانده می‌شود.

$\sqrt{16} = ۴$

$\sqrt{16} = ۴$ غلط

$y+1=5$

پدر x پسر علوی است

$x+2$

پدر x

*

= سورها =

می‌دانیم یک گزاره‌نما شامل یک یا چند متغیر ممکن است به ازای بعضی از مقادیر متغیرها درست و به ازای همهٔ مقادیر متغیرها درست (یا نادرست) باشد. در هر یک از این حالات می‌توان آنرا با علامت مخصوصی به نام **سور** شروع کرد و گزاره‌نما را به یک گزاره تبدیل نمود.

دو نوع سور و لذا دو نوع گزارهٔ سوری وجود دارد:

الف - **گزاره‌های با سور عمومی** - گزاره‌هایی هستند که خاصیتی را به تمام عضوهای مجموعهٔ مرجع مورد بحث (عالم سخن) نسبت می‌دهند. برای نمایش این گزاره‌ها از علامت $\forall$ استفاده می‌کنیم. این گزاره‌ها را در حالت کلی وقتی عالم سخن معلوم باشد به صورت $\forall x\,;\ P(x)$ نمایش می‌دهیم. یک گزاره که به صورت گزاره‌نمای همراه با سور عمومی بیان می‌شود فقط و فقط وقتی درست است که دامنهٔ متغیر آن مساوی مجموعهٔ جوابش باشد. این گزاره‌ها معمولاً با یکی از عبارت‌های "هر چه باشد" - "برای تمام مقادیر" "برای هر" "برای هر کدام" و ... شروع می‌شود.

دو راه تبدیل یک گزاره‌نما $\underbrace{P(x)}$ به یک گزاره وجود دارد:

x خاصیت P دارد

محمول

۱) به جای متغیر x، اسم خاص بگذاریم

۲) ابتدای گزاره سور عمومی $\forall x$ یا سور وجودی $\exists x$ بگذاریم

$\forall x\,;\ P(x)$ هر شیئی خاصیت P را دارا

$\exists x\,;\ P(x)$ شیئی وجود دارد (که خاصیت P را دارا)

(۴) سور عمومی $\forall x ; \underbrace{P(x)}_{\text{درست است}} \Leftrightarrow$ مجموعه جواب $P(x) =$ دامنه متغیر x

سور وجودی $\exists x ; \underbrace{P(x)}_{\text{درست است}} \Leftrightarrow$ مجموعه جواب $P(x) \neq \emptyset$

ب - گزاره‌های با سور وجودی - گزاره‌هایی هستند که خاصیتی را به یک یا چند عضو از مرجع مورد بحث (عالم سخن) نسبت می‌دهند. برای نمایش این گزاره‌ها از نماد $\exists$ استفاده می‌کنیم. این گزاره‌ها را در حالت کلی وقتی عالم سخن معلوم باشد به صورت $\exists x ; P(x)$ نمایش می‌دهند.

یک گزاره که به صورت گزاره‌نمای همراه با سور وجودی بیان می‌شود فقط و فقط وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد. این گزاره‌ها معمولاً با یکی از عبارتهای "اقلاً برای یک مقدار"، "مقداری وجود دارد"، "برای بعضی مقادیر" و ... شروع می‌شود.

توجه (i) سور صفر ($\nexists$) و سور وجود فقط یک ($\exists!$) را می‌توان از طریق فوق تعریف کرد. بطور اختصار $\nexists x ; P(x)$ به معنای $\forall x ; \sim P(x)$ است، و $\exists! x ; P(x)$ به معنای آن است که فقط یک مقدار برای x وجود دارد بطوریکه به ازای آن $P(x)$ درست است.

(ii) حرف P را حرف محمولی می‌نامند.

نقیض گزاره‌های سوری :

نقیض: نیست که هر x ی خاصیت P دارد $\equiv$ x ی هست که خاصیت P ندارد

قضیه :

(i) $\sim \left(\forall x ; P(x) \right) \equiv \exists x ; \sim P(x)$

(ii) $\sim \left(\exists x ; P(x) \right) \equiv \forall x ; \sim P(x)$

تمرین: (ii) را از (i) نتیجه بگیرید. — چنین نیست که x وجود داشته باشد که خاصیت P را داشته باشد = هر شیئی که در نظر گرفته شود خاصیت P ندارد

سور صفر $\overline{\exists} x ; P(x)$ = هیچ شیئی خاصیت P ندارد = P ندارد

مثال نقض: برای اثبات نادرستی گزاره $\forall x ; P(x)$ درستی نقیض آن یعنی $\exists x ; \sim P(x)$ را ثابت می‌کنیم و برای این منظور کافیست مقداری برای x مانند a بیابیم بطوریکه $P(a)$ درست نباشد.

مثال ۲: آیا هر عدد اول فرد است؟ خیر زیرا عدد اول ۲ وجود دارد که فرد نیست.

فرض کنید S فرمولی (عبارتی با معنی متشکل از گزاره‌ها، گزاره‌نماها، سورها، ...) عاری از موارد $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$ باشد. اگر در S تبدیلات ذیل را انجام دهیم فرمولی مانند S^* حاصل می‌شود که آن را جفت فرمول S می‌نامیم:

I. تبدیل هر مورد $\wedge$ به $\vee$ و هر مورد $\vee$ به $\wedge$ II. تبدیل هر مورد $\forall$ به $\overline{\exists}$ و هر مورد $\exists$ به $\forall$

III. اسقاط هر مورد $\sim$ که بلافاصله در سمت چپ یک متغیر گزاره‌ای یا یک حرف معمولی است و درج $\sim$ بلافاصله در سمت چپ هر یک از این حروف که $\sim$ بلافاصله در آن مقدم نیست.

قضیه (اصل جفت). اگر فرمول S عاری از موارد $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$ باشد، نقیض S معادل جفت آن است.

برهان. رک. آنالیز ریاضی تألیف دکتر غلامحسین مصاحب.

مثال. $\sim\left(\forall x \sim \exists y ; \left(P \vee \sim F(x,y)\right)\right) \equiv \exists x \sim \forall y ; \left(\sim P \wedge F(x,y)\right)$

برای اثبات گزاره سوری وجودی $\exists x ; P(x)$ به یکی از روش‌های ذیل عمل می‌کنیم:

الف) شیئی مانند a در دامنه متغیر x می‌یابیم (معرفی می‌کنیم) که خاصیت P داشته باشد.

مثال / "عدد اول زوجی وجود دارد": $\exists x \in D ; E(x)$

مجموعه اعداد اول — زوج بودن

درست است زیرا $2 \in D$ و $E(2)$ درست است.

ب) فرض نادرست بودن $\exists x ; P(x)$ منجر به تناقض $\sim P \wedge P$ شود (برهان خلف)

وجود نداشتن شیئی با خاصیت P

ج) روشی (الگوریتمی) برای یافتن آن شیء ارائه دهیم

مثلاً بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد 2^{10} و 10^{20} وجود دارد.

زیرا می‌توانیم با روش نردبانی آن را در تعداد متناهی مرحله (با کامپیوتر) بیابیم.

برای اثبات گزاره سوری عمومی $\forall x ; P(x)$ به یکی از روش‌های ذیل عمل می‌کنیم:

الف) یک x دلخواه در دامنه متغیر انتخاب نموده و نشان می‌دهیم این x خاصیت P دارد.

مثلاً $\forall x \in \mathbb{R}^{\geq 0} ; \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$

زیرا فرض کنیم x یک عدد حقیقی نامنفی باشد. داریم

$$(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0$$

$$2\sqrt{x} \leq x + 1$$

$$\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2} \quad . \ \square$$

سنگ قبرها نمور

ب) فرض نادرستی $\forall x ; P(x)$ به تناقض منجر شود. (برهان خلف)

ج) در حالتی که دامنهٔ متغیر متناهی باشد، نشان می‌دهیم هر عضو دامنهٔ متغیر خاصیت P را دارد.

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

مثال: نقیض گزارهٔ ذیل را بیابید:

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta \; \underbrace{\underbrace{\forall x ; \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon}_{Q(\delta)}}_{P(\varepsilon)}$$

$$\exists \varepsilon \; \sim P(\varepsilon) \qquad \forall \delta \; \sim Q(\delta) \qquad \exists x ; \; 0 < |x - x_0| < \delta \;\&\; |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

«کاربرد جبر گزاره‌ها در ریاضیات»

الف) کلیات

۱. گاهی برای اثبات فرمولی مانند Q، فرمولی دیگر مانند P به دست می‌آورند طوری که بتوان P و $P \Rightarrow Q$ را ثابت کرد.

۲. اگر بتوانیم دو فرمول به صورت $P \Rightarrow Q$ و $\sim P \Rightarrow Q$ ثابت کنیم، آنگاه بنابر راستگوی $Q \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (\sim P \Rightarrow Q)]$ می‌توان Q را نتیجه گرفت.

۳. (برهان خلف) گاهی برای اثبات فرمول Q، $\sim Q$ را درست فرض کرده و از آن تناقضی استخراج می‌کنند، یعنی دو نتیجه متناقض مانند R و $\sim R$. مجوز این کار راستگوی ذیل است:

$$[\sim Q \Rightarrow (R \wedge \sim R)] \Rightarrow Q$$

تذکر ۱- گاهی در اثبات Q به برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)، استنتاج R و $\sim R$ لازم نمی‌شود بلکه یکی از این دو حکمی است که قبلاً ثابت شده است و لذا استنتاج دیگری، کافی است.

تذکر ۲. از حالات نادر برهان خلف این است که برای اثبات Q، $\sim Q$ را مفروض می‌گیرند و Q را استخراج می‌کنند. مجوز این کار راستگوی $Q \Leftrightarrow (\sim Q \Rightarrow Q)$ است.

ب) اثبات فرمول شرطی $P \Rightarrow Q$

۱. (اثبات مستقیم) در این طریق P را مفروض گرفته و Q را از آن استخراج می‌کنند.

۲. برای اثبات $Q \Rightarrow P$ ، عکس نقیض آن [illegible]

۳. اگر فرمولی مانند R بیابیم و $P \Rightarrow R$ ، $R \Rightarrow Q$ را ثابت کنیم ، آنگاه بنا بر قاعده تعدی گزاره‌های شرطی ، $P \Rightarrow Q$ ثابت خواهد شد.

۴. برهان خلف که شرح آن در بالا آمد.

ج) گاهی برای اثبات فرمول $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ می‌توان $P \Rightarrow R$ یا $Q \Rightarrow R$ را ثابت نمود. مجوز این کار قاعده حذف عاطف و قاعده تعدی گزاره‌های شرطی است (چگونه؟)

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P \Rightarrow R$$

د) گاهی برای اثبات فرمول $(P \vee Q) \Rightarrow R$ می‌توان $P \Rightarrow R$ و $Q \Rightarrow R$ را ثابت نمود. مجوز این کار راستگوی ذیل است:

$$[(P \vee Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \,\&\, (Q \Rightarrow R)]$$

متغیرهای آزاد و پایبند: موردی از یک متغیر را در یک فرمول پایبند به یک سور می‌گویند هرگاه همراه آن سور یا در دامنه عمل سور همنام متغیر باشد. در غیر این صورت (وابسته) آن مورد را آزاد می‌گویند.

$\forall x P(x)$ $\quad$ $\forall x$

نام متغیر پایبند را در سرتاسر یک فرمول می‌توان عوض کرد ولی نام متغیرهای آزاد را نمی‌توان عوض کرد و با آنها مثل ثابت‌ها رفتار می‌کنیم.

مثال)

$$\forall x \exists y ; (x+y=z)$$

$$(\forall x ; x>1) \Rightarrow [(\exists z \forall x ; \log x + y = z) \wedge \forall x ; e^{x}+t > \tfrac{1}{2}]$$

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x ; 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

آزاد   آزاد

مثال) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$ ثابت کنید

حل. باید نشان دهیم $\forall \varepsilon \exists \delta \forall x ; 0<|x-2|<\delta \Rightarrow |2x+1-5|<\varepsilon$

$0<|x-2|<\delta \Rightarrow \underbrace{|2x-4|<\varepsilon}$

$|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$ چرک نویس

گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چنین $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ داریم

$$\forall x ; \quad 0<|x-2|<\delta \xrightarrow{\delta=\frac{\varepsilon}{2}} 0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(2x+1)-5|<\varepsilon$$

هر گردویی، گرد است

$$\forall x \in A \; ; \; P(x)$$

مجموعه گردوها — گرد بودن

چنین نیست که هر گردویی، گرد است

$$\equiv \sim \forall x \in B \; ; \; x \in A$$

مجموعه گردها

به ازای هر عدد، عددی بزرگتر از آن وجود دارد

$$\forall x \, \exists y \; ; \; y > x$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} \, \forall n \in \mathbb{Z} \, \exists k \in \mathbb{Z} \; ; \; k \in \underbrace{F(m,n)}_{\text{مجموعه اعداد بین } n,m}$$

$$m<k<n \;\; \text{یا} \;\; n<k<m$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \, \nexists m \in \mathbb{Z} \; ; \; n<m<n+1$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} \; ; \; \sim (n<m<n+1)$$

$$n<m \wedge m<n+1$$

$$n \geq m \;\dot{\vee}\; m \geq n+1$$

$$\nexists x \; ; \; P(x)$$

$$\forall x \; ; \; \sim P(x)$$

آیا زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است

$$\forall A \; ; \; \emptyset \subseteq A$$

حداقل یک چیز هست که خاصیت F دارد.

$$\exists x;\ F(x)$$

فقط (دقیقاً) یک چیز هست که خاصیت F دارد.

$$\cancel{\exists! x;\ F(x)}$$

$$\big(\exists x; F(x)\big) \wedge \big[\forall y; \big(F(y) \Rightarrow y = x\big)\big]$$

حداقل دو چیز هست که خاصیت F دارد.

$$\exists x,y \quad \boxed{\exists x\ \exists y}; \quad \big(F(x) \wedge F(y) \wedge x \neq y\big)$$

فقط دو چیز وجود دارد که خاصیت F دارد.

$$\big[\exists x,y;\ \big(F(x) \wedge F(y) \wedge x \neq y\big)\big] \wedge \big[\forall z; \big(F(z) \Rightarrow z \in \{x,y\}\big)\big]$$

حداکثر یک چیز هست که خاصیت F دارد.

فقط یک چیز خاصیت F دارد $\vee\ \big(\nexists x;\ F(x)\big)\ \forall x;\ \sim F(x)$

$$\sim \exists x,y;\ x \neq y \wedge F(x) \wedge F(y)$$

اگر باران ببارد (p)، آنگاه هوا سرد می‌شود (q).

هوا سرد نمی‌شود ($\sim q$) یا برف می‌بارد (r).

برف نمی‌بارد ($\sim r$)

باران نمی‌بارد ($\sim p$)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim q \vee r \\ \sim r \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\sim q \vee r$	$\sim r$	$\sim p$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim q \vee r \\ \sim r \\ \hline p \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

رفع تالی

نقیض انتزاع

هرگاه درستی $p \Rightarrow q$ از نادرست بودن p نتیجه شود می‌گوییم $p \Rightarrow q$ به انتفاء مقدم درست است.

وقتی $p \Rightarrow q$ درست است می‌گوییم
p شرط کافی برای q است
و
q شرط لازم برای p است.

$p \Rightarrow q$

تالی مقدم

$p \Rightarrow q$

[illegible]

اگر محصولات زیاد شود، قیمت‌ها افزایش یابد

$q \Rightarrow r$

اگر قیمت‌ها افزایش یابد، تورم بالا می‌رود

$\therefore p \Rightarrow r$

∴ اگر محصولات زیاد شود، آنگاه تورم بالا می‌رود

شرط لازم برای این که اگر کسی کاری کند (p) نتواند به کار خود ادامه دهد (q) آن است که غذا و مسکن نداشته باشد

او غذا و مسکن ندارد

∴ او کار می‌کند ولی نمی‌تواند به کار خود ادامه دهد.

$$\sim(r \wedge s) \Rightarrow \sim(p \wedge q)$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \wedge s)$$

$$\sim r \vee \sim s \quad \sim(r \wedge s)$$

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

قانون نقض انتزاع

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \wedge s)$$

$$\sim r$$ ادخال فصل

$$\therefore p \wedge \sim q$$

(راه دوم

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \wedge s)$$

$$\sim r$$

$$r \wedge s \Rightarrow r$$ حذف عاطف

$$\sim(r \wedge s)$$ نقض انتزاع

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$ نقض انتزاع

نظریه مجموعه ها:

"مجموعه" یک اصطلاح تعریف نشده است ولی از نظر شهودی یک مجموعه عبارت است از دسته مشخص از اشیاء A به طوری که هر شیء x در عالم یکی از دو وضعیت ذیل را داشته باشد: الف) عضو مجموعه است $x\in A$ ب) عضو مجموعه نیست $x\notin A$

اصل گسترش: دو مجموعه برابرند هرگاه اعضای یکسان داشته باشند

تعریف: می‌گوییم $A\subseteq B$ هرگاه هر عضو A، عضو B باشد یعنی

$$\forall x;\quad x\in A \Rightarrow x\in B$$

نکته: ۱- جابجایی عناصر در مجموعه مهم نیست. بنابه اصل گسترش $\{1,2\}$ و $\{2,1\}$ برابرند.

۲- تکرار اعضا، بنابه اصل گسترش اهمیت ندارد. پس $\{1,1,2\}=\{1,2\}$.

ما همواره فرض می‌کنیم لااقل یک مجموعه A_0 در عالم وجود دارد.

اصل تصریح: اگر $\varphi(x)$ یک گزاره‌نما باشد و A دامنه متغیر x باشد، آنگاه

$B=\{x\in A \mid \varphi(x)\}$ یک مجموعه است.

تعریف: $\{x\in A_0 \mid x\neq x\}$ که بنابه اصل تصریح وجود دارد، مجموعه تهی نام دارد.

فقط یک مجموعه تهی در عالم وجود دارد (که آن را با $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهیم).

به برهان خلف فرض کنیم دو مجموعه (متمایز) $\emptyset_1$ و $\emptyset_2$ در عالم موجود داشته باشد. بنا به اصل گسترش

چون $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$ پس یکی از آنها عضوی دارد که در دیگری نیست. اما تهی هیچ عضوی ندارد.

پارادوکس راسل: فرض کنید در یک محله فقط یک آرایشگر وجود دارد. او فقط ریش کسانی را می‌تراشد که ریش خود را نمی‌تراشند. سوال: ریش خود آرایشگر را چه کسی می‌تراشد؟

- اگر آرایشگر ریش خود را بتراشد، آنگاه نباید توسط آرایشگر که خودش است تراشیده شود. ریشش
- اگر 〃 〃 نتراشد باید نزد آرایشگر که خودش است برود و ریشش را بتراشد

ما دچار پارادوکس (چیزی که درست به نظر می‌رسد ولی غلط است یا غلط به نظر می‌رسد ولی درست است و ...) شدیم ⟵ باطل

این پارادوکس دقیقاً نسخه دیگری از پارادوکس ذیل است:

آیا مجموعه همه مجموعه‌ها وجود دارد؟ خیر زیرا در ساختن یا معرفی آن به صورت $\{\emptyset, \mathbb{N}, \{\text{ابا ما}\}, \{\text{رستم}\}, \{1,2,*\}, \ldots, \boxed{\text{مجموعه همه مجموعه‌ها}}\}$ قبل از ساخته شدن یا معرفی شدن باید خودش را به عنوان یک عضو در بر بگیرد.

فلسفه ریاضی

دانلود رایگان
my homepage

تعریف: فرض کنید A, B دو مجموعه باشند

$$A-B=\{x\in A \mid x\notin B\}$$

$$A\cap B:=\{x\in A\mid x\in B\}$$

اصل تصریح

$$A^c=A'=M-A \qquad A\cup B:=\{x\in \underbrace{M}_{\text{مجموعه مرجع = عالم سخن}}\mid x\in A\vee x\in B\}$$

مسأله ۱) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\boxed{A \cap B = A}$

حل مسأله مثل کوهنوردی است. متوسط، لوازم کوهنوردی در اول کوله پشتی شما است. هر جا لازم بود از آن استفاده می کنیم.

در هر مرحله نباید چشممان را از قله برداریم.

$\boxed{A\cap B \subseteq A}$

حل. فرض کنیم $x \in A \cap B$. پس $x \in A$ و $x \in B$.

بنا به حذف عاطف، $x \in A$.

$\therefore A \cap B \subseteq A$

$\boxed{A \subseteq A \cap B}$

اینک فرض کنیم $x \in A$ (۱). بنا به فرض $A \subseteq B$، پس $x \in B$ (۲). از (۱)، (۲) نتیجه می گیریم که $x \in A \cap B$.

$\therefore A \subseteq A \cap B$

بنا به اصل گسترش، $A = A \cap B$ $\square$

توجیه دلایل ما باید فقط به یکی از صورتهای ذیل باشد:

۱- بنا به اصل

۲- بنا به قضیه

۳- بنا به فرض

۴- بنا به یکی از مراحل قبلی برهان

مسأله ۲. اگر $A \cap B = A$ آنگاه $A \subseteq B$.

حل. گیریم $x \in A$. بنا به فرض $A \cap B = A$

پس بنا به اصل گسترش $x \in A \cap B$. لذا $x \in A \wedge x \in B$

بنا به حذف عاطف $x \in B$.

$\therefore A \subseteq B. \square$

مسأله ۳. اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آنگاه $A \cap C \subseteq B \cap D$.

حل. فرض کنیم $x \in A \cap C$. پس $x \in A$، $x \in C$. از این که $x \in A$، $A \subseteq B$ نتیجه می گیریم $x \in B$ (۱). از این که $x \in C$، $C \subseteq D$ نتیجه می گیریم که $x \in D$ (۲). از (۱)، (۲) نتیجه می گیریم $x \in B \cap D$.

$\therefore A \cap C \subseteq B \cap D. \square$

مسئله ۳۸. $A\cap(A\cup B)=A$ (قانون جذب)

حل. فرض کنیم $x\in A\cap(A\cup B)$. پس $x\in A$ و $x\in A\cup B$. بنابراین $x\in A$.

$$\therefore A\cap(A\cup B)\subseteq A$$

بالعکس، فرض کنیم $x\in A$ (۱). بنابه ادخال فاصل $x\in A$ یا $x\in B$، پس $x\in A\cup B$ (۲). از (۱)، (۲) داریم $x\in A\cap(A\cup B)$.

$$\therefore A\subseteq A\cap(A\cup B)$$

لذا بنا به اصل تصریح $A\cap(A\cup B)=A$. $\square$

تعریف. $\{\{a\},\{a,b\}\}$ را با (a,b) نشان می‌دهیم و آن را یک زوج مرتب می‌گوییم. بنا به اصل گسترش $(a,b)=(c,d)$ اگر و تنها اگر $a=c$, $b=d$ (تمرین).

مؤلفه اول، مؤلفه دوم

تعریف. $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$ را حاصلضرب دکارتی A, B می‌گویند.

یک زیرمجموعه R از $A\times B$ را یک رابطه از A به B می‌گویند.

مجموعه آغاز، مجموعه پایان

اگر $(a,b)\in R$ آنگاه می‌نویسیم aRb.

اگر $R\subseteq A\times A$ آنگاه R را یک رابطه در A می‌گوییم. مجموعه مؤلفه‌های اول R را حوزه تعریف R (D_R) و مجموعه مؤلفه‌های دوم R را برد R (R_R) می‌گوییم.

$\boxed{aRb \equiv (a,b)\in R}$

انواع رابطه

تعریف. فرض کنیم R رابطه‌ای در A باشد. می‌گوییم R

الف) منعکس است هرگاه $\forall a\in A;\ aRa$

ب) متقارن " " $\forall a,b\in A;\ (aRb \Rightarrow bRa)$

ج) پادمتقارن (قرینه) است هرگاه $\forall a,b\in A\,[(aRb \,\&\, bRa) \Rightarrow a=b]$

د) متعدی است هرگاه $\forall a,b,c\in A;\ [(aRb \,\&\, bRc) \Rightarrow aRc]$

ه) نامنعکس " " $\forall a\in A;\ a\cancel{R}a$

و) با اصل تثلیث ضعیف است هرگاه $\forall a,b\in A;\ (aRb \vee bRa \vee a=b)$

ز) " " " قوی " " $\forall a,b\in A;\ (aRb \veebar bRa \veebar a=b)$

یای مانع جمع

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ح) ترتیب جزئی است هرگاه منعکس، پادمتقارن و متعدی باشد.

ط) " قوی " " نامنعکس و متعدی باشد.

ی) هم‌ارزی است هرگاه منعکس، متقارن، متعدی باشد.

ک) مرتبط است هرگاه $\forall a,b\in A;\ a\le b \vee b\le a$

ل) زنجیر است هرگاه مرتبط و ترتیب جزئی باشد.

مثال ۱) $A=\{1,2\}$, $R=\{(1,2),(1,1),(2,2)\}$

R منعکس است زیرا $\underbrace{\forall a\in A;\ aRa}_{1R1\ \&\ 2R2}$.

R متقارن نیست زیرا $1,2\in A,\ 1R2\ ,\ 2\not R 1$

R متعدی است زیرا $\forall a,b,c\in A;\ [(aRb\ \&\ bRc)\Rightarrow aRc]$

$1R2\ \&\ 2R2 \Rightarrow 1R2$ ✓

$1R1\ \&\ 1R2 \Rightarrow 1R2$ ✓

$1R1\ \&\ 1R1 \Rightarrow 1R1$ ✓

$2R2\ \&\ 2R2 \Rightarrow 2R2$ ✓

$1R2\ \&\ 2R1 \Rightarrow 1R1$ ✓

$\vdots$ ع $\vdots$

R نامنعکس نیست زیرا $1\in A, 1R1$:

$\underline{\sim \forall a\in A;\ aRa}$

$\exists a\in A;\ aRa$

مثال ۲) رابطه $>$ در $\mathbb{R}$ یک رابطه ترتیب جزئی است.

مثال ۳) رابطه عاد کردن $a|b \Leftrightarrow \exists c;\ b=ac$ در $\mathbb{Z}$ یک رابطه ترتیب جزئی نیست زیرا پادمتقارن نیست: $1|-1$ و $-1|1$ ولی $1\neq -1$. ولی در $\mathbb{N}$ رابطه ترتیب جزئی است:

$a=a.1 \Rightarrow a|a$ (انعکاسی است)

$a|b\ \&\ b|c \Rightarrow \exists x,y;\ b=ax\ ,\ c=by \Rightarrow c=by=(ax)y=a\underbrace{(xy)}_{z}$

$\Rightarrow a|c$ (متعدی است)

$a|b \ \& \ b|a \Rightarrow \exists x,y \in \mathbb{N};\ b=ax,\ a=by \Rightarrow \cancel{a}=by=\cancel{a}xy \Rightarrow$ $a\in\mathbb{N}$

$xy=1 \Rightarrow x=y=1 \Rightarrow a=b$

مثال ۴) همنهشتی $a \underset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|b-a$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است زیرا

$m|a-a \Rightarrow a \underset{m}{\equiv} a$ ($\underset{m}{\equiv}$ انعکاسی است)

در ریاضی وقتی سور کلی داریم یعنی سور ما سور عمومی است

$a \underset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|b-a \Rightarrow \exists c;\ b-a=mc \Rightarrow$

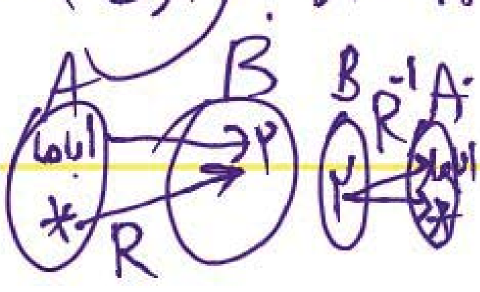
$a-b=m(-c) \Rightarrow m|a-b \Rightarrow b \underset{m}{\equiv} a$ ($\underset{m}{\equiv}$ متقارن است)

$a \underset{m}{\equiv} b \ \& \ b \underset{m}{\equiv} c \Rightarrow m|b-a \ \& \ m|c-b \Rightarrow \exists x,y;\ b-a=mx \ \&$

$c-b=my \Rightarrow (b-a)+(c-b)=mx+my \Rightarrow c-a=m(x+y) \Rightarrow$

$m|c-a \Rightarrow a \underset{m}{\equiv} c.$ ($\underset{m}{\equiv}$ متعدی است)

تعریف. اگر R یک رابطه از A به B باشد، $R^{-1}=\{(b,a)|\ (a,b)\in R\}$ را وارون R و با R^{-1} نشان می‌دهیم. بدیهی است که R^{-1} رابطه‌ای از B به A است،



$R_{R^{-1}}=D_R$, $D_{R^{-1}}=R_R$

مسأله ۱: فرض کنید R متقارن باشد. ثابت کنید R^{-1} نیز متقارن است.

$$\forall x,y;\ xR^{-1}y \Rightarrow yR^{-1}x$$

حل:

$$\forall x,y;\ xR^{-1}y \Rightarrow (x,y)\in R^{-1} \xRightarrow{\text{تعریف وارون}} (y,x)\in R \Rightarrow yRx \xRightarrow{\text{متقارن } R} xRy \Rightarrow$$

$$(x,y)\in R \xRightarrow{\text{تعریف وارون}} (y,x)\in R^{-1} \Rightarrow yR^{-1}x\ .\ \square$$

مسأله ۲: $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

حل:

$$(u,v)\in (R\cup S)^{-1} \Leftrightarrow (v,u)\in R\cup S \Leftrightarrow (v,u)\in R \vee (v,u)\in S \Leftrightarrow$$

$$(u,v)\in R^{-1} \vee (u,v)\in S^{-1} \Leftrightarrow (u,v)\in R^{-1}\cup S^{-1}\ .\ \square$$

مسأله ۳: ثابت کنید $A\times\emptyset=\emptyset$.

حل: فرض کنیم $A\times\emptyset$ تهی نباشد (برهان خلف) (فرض خلف). پس عضوی مانند (a,b) دارد. بنابراین

$a\in A$, $b\in\emptyset$ (۱). اما بنا به تعریف مجموعه تهی $b\notin\emptyset$ (۲). (۱) و (۲) متناقضند.

آشکار است (۱) با (۲) ... بنابراین فرض خلف باطل است. پس $A\times\emptyset=\emptyset$. $\square$

مسأله ۴: ثابت کنید اگر $A\cup B=A\cap B$ آنگاه $A=B$.

حل:

$$x\in A \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow x\in A\ \&\ x\in B \Rightarrow x\in B$$

$$\therefore A\subseteq B$$

به طور مشابه $B\subseteq A$. $\square$

مسأله. $(A-B)-C = A-(B\cup C)$

حل. $x\in (A-B)-C \Leftrightarrow x\in A-B \;\&\; x\notin C \Leftrightarrow (x\in A \;\&\; x\notin B) \;\&\; x\notin C$

$$\Leftrightarrow x\in A \;\&\; \underbrace{(x\notin B \;\&\; x\notin C)}_{\underbrace{\sim x\in B\cup C}_{x\notin B\cup C}} \Leftrightarrow x\in A-(B\cup C). \;\square$$

مسأله ۲. اگر $\underbrace{A\subseteq B}_{\text{فرض}}$ آنگاه $\underbrace{B'\subseteq A'}_{\text{حکم}}$

حل. گیریم $\boxed{x\in B'}$. باید نشان دهیم $x\in A'$ (؟). گیریم $\underbrace{x\notin A'}_{\text{خلف}}$. پس $x\in A$.

چون $A\subseteq B$ پس $x\in B$. لذا $\boxed{x\notin B'}$ - $\times$ - پس $x\in A'$. $\square$

مسأله ۳. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

حل. $(x,y)\in A\times(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A \;\&\; y\in B\cup C$

$$\Leftrightarrow x\in A \;\&\; (y\in B \vee y\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A \;\&\; y\in B) \vee (x\in A \;\&\; y\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \;\vee\; (x,y)\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\in (A\times B)\cup(A\times C). \;\square$$

$p \Leftrightarrow q \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

مسأله ۴. R متقارن است $\Leftrightarrow$ اگر $R = R^{-1}$.

حل. ($\Leftarrow$) فرض کنیم R متقارن باشد. داریم

$$(x,y)\in R \overset{R\ \text{متقارن}}{\Longleftrightarrow} (y,x)\in R \Leftrightarrow (x,y)\in R^{-1}$$

بنابراین $R = R^{-1}$. ////

($\Rightarrow$) فرض کنیم $R = R^{-1}$. فرض کنیم $\underbrace{(x,y)\in R}_{xRy}$. چون $R = R^{-1}$ پس $(x,y)\in R^{-1}$. لذا $\underbrace{(y,x)\in R}_{yRx}$. بنابراین R متقارن است. □

مسأله ۵. ثابت کنید اگر R متعدی باشد آنگاه R^{-1} نیز متعدی است.

حل.

$$\forall x,y,z;\ xRy \ \&\ yRz \Rightarrow xRz$$

$$\forall x,y,z;\ yR^{-1}x \ \&\ zR^{-1}y \Rightarrow zR^{-1}x$$

$$\forall x,y,z;\ zR^{-1}y \ \&\ yR^{-1}x \Rightarrow zR^{-1}x$$

$$\forall x,y,z;\ xR^{-1}y \ \&\ yR^{-1}z \Rightarrow xR^{-1}z$$

صورت این کارها، منطقی را انجام ندهیم

$$\forall x,y,z;\ (xR^{-1}y \ \&\ yR^{-1}z) \Rightarrow (yRx \ \&\ zRy) \xRightarrow[\forall t,s,r;\ (tRs \ \&\ sRr) \Rightarrow tRr]{} zRx \Rightarrow xR^{-1}z. \ \square$$

خانواده اندیس‌دار از مجموعه‌ها

فرض کنیم I یک مجموعه باشد و برای هر $\alpha \in I$ یک مجموعه مانند A_α موجود داشته باشیم. در این صورت گردآیه $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ را یک خانواده اندیس‌دار از مجموعه‌ها می‌گوییم. (بعضی از A_αها ممکن است مساوی باشند)

مثال ۱) اگر $A_n=[0,\frac{1}{n}]$ آنگاه $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک خانواده نامتناهی از مجموعه‌ها است.

مثال ۲) هر مجموعه از مجموعه‌ها را می‌توان به طور خودکار اندیس‌دار کرد: $A=\{\{\text{بابا}\}, \emptyset, \{1,2,3\}, \{*,\sqrt{5}\}\}$

$A_{\{\text{بابا}\}}=\{\text{بابا}\}, \quad A_{\emptyset}=\emptyset, \quad A_{\{1,2,3\}}=\{1,2,3\}, \quad A_{\{*,\sqrt{5}\}}=\{*,\sqrt{5}\}$

$A=\{B_i\}_{i=1}^{4}$ در این صورت $B_1=\{\text{بابا}\}, B_2=\emptyset, \cdots$ روش دیگر این است که

پس $A=\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$

نکته: $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha=\{\overset{M}{x} : \exists \alpha ; x \in A_\alpha\}$ مجموعه مرجع

$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha=\{x \in M \mid \forall \alpha ; x \in A_\alpha\}$

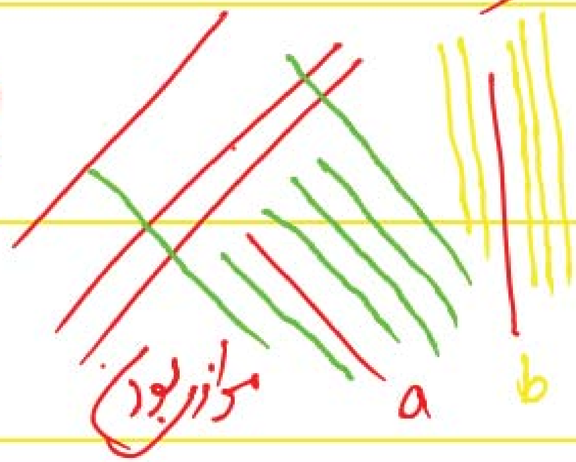
تعریف: گیریم X یک مجموعه باشد. مجموعه تمام زیرمجموعه‌های X را با $P(X)$ نمایش می‌دهیم و آن را مجموعه توانی X می‌گوییم.

تعریف: فرض کنیم X یک مجموعه باشد. یک گردآیه $\{A_\alpha\}$ از زیرمجموعه‌های X را یک افراز برای X می‌گوییم هرگاه الف) برای هر α، $A_\alpha \neq \emptyset$

ب) $\forall \alpha \neq \beta ; A_\alpha \cap A_\beta=\emptyset$ ج) $\bigcup A_\alpha = X$.

تعریف. فرض کنید ~ یک رابطه هم‌ارزی روی A باشد. برای $a\in A$، مجموعه $\{x\in A : x\sim a\}$ را رده هم‌ارزی a می‌گوییم.

$[a]$



رده class

لم ۱. اگر $a\sim b$ آنگاه $[a]=[b]$.

برهان. $x\in[a]\Rightarrow x\sim a \xRightarrow[\text{متعدی}]{a\sim b} x\sim b\Rightarrow x\in[b]$.

$\therefore [a]\subseteq[b]$

به طور مشابه $[b]\subseteq[a]$. □

لم ۲. اگر $[a]=[b]$ آنگاه $a\sim b$.

برهان. $a\sim a\Rightarrow a\in[a] \xRightarrow[\text{اصل گسترش}]{[a]=[b]} a\in[b]\Rightarrow a\sim b$. □

لم ۳. به ازای هر a، $[a]\neq\emptyset$.

برهان. ~ منعکس $\Rightarrow a\sim a\Rightarrow a\in[a]\Rightarrow [a]\neq\emptyset$ □

لم ۴. اگر $\boxed{a\not\sim b}$ آنگاه $[a]\cap[b]=\emptyset$.

برهان خلف. فرض کنیم $c\in[a]\cap[b]\neq\emptyset$. پس $c\sim a$ & $c\sim b$ بنابه

$b\sim c$

متقارن بودن ~ داریم $b\sim a$. چون ~ متعدی است، داریم $\boxed{a\sim b}$. ✗

پس $[a]\cap[b]=\emptyset$. □

قضیه. اگر $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی A باشد آنگاه $\frac{A}{\sim}=\{[a] : a\in A\}$ یک افراز برای A است.

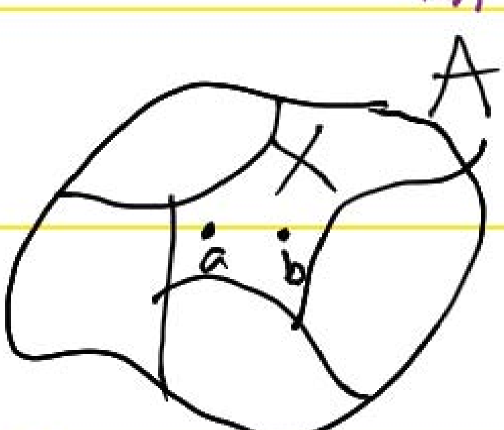
برهان. (۱) بنا به لم ۳، هر عضو $\frac{A}{\sim}$ ناتهی است.

(۲) گیریم $[a]\neq[b]$. بنا به عکس نقیض حکم لم ۱، $a\nsim b$ پس بنا به لم ۴ $[a]\cap[b]=\emptyset$.

(۳) نشان می‌دهیم $A=\bigcup_{a\in A}[a]$:

اولاً- بنا به تعریف $[a]$، داریم $[a]\subseteq A$ پس $\bigcup_{a\in A}[a]\subseteq A$.

ثانیاً- فرض کنیم $b\in A$. چون $b\in[b]$ پس $b\in\bigcup_{a\in A}[a]$. □



قضیه. فرض کنیم M یک افراز برای A باشد.

قرار می‌دهیم $a\sim b \iff \exists X\in M; (a\in X \,\&\, b\in X)$

در این صورت $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است.

برهان. (منعکس) برای هر $z\in A$، چون اجتماع اعضای M برابر A است پس عضوی از M مانند X وجود دارد که $z\in X$. پس $z\in X \,\&\, z\in X$. پس $z\sim z$.

(متقارن): فرض کنیم $a\sim b$. پس $X\in M$ هست که $a\in X \,\&\, b\in X$. پس $b\in X \,\&\, a\in X$ لذا $b\sim a$.

(متعدی): فرض کنیم $a\sim b$ و $b\sim c$. پس $X, Y\in M$ هست که $a,b\in X$ و $b,c\in Y$. پس $b\in X\cap Y\neq\emptyset$. لذا $X=Y$ لذا $a,c\in Y$. بنا بر این $a\sim c$. □

تعریف. فرض کنیم $(A,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد یعنی $\preceq$ یک رابطه ترتیب جزئی روی مجموعه A است و $B\subseteq A$.

$a\succeq b \equiv b\preceq a$

الف) $a\in A$ را یک کران بالا برای B می‌گوییم هرگاه $\forall x\in B;\ x\preceq a$

(پایین) ($\succeq$)

ب) کوچکترین کران بالای B را (در صورت وجود) سوپرمم B می‌گوییم و با $\sup B$ نمایش می‌دهیم.

بزرگترین کران پایین — اینفیمم — $\inf B$

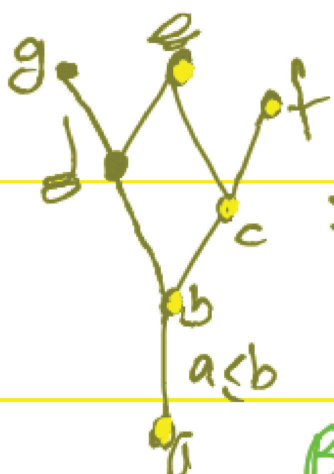
ج) اگر $\sup B\in B$ آنگاه آن را ماکزیمم B می‌گوییم و با $\max B$ نمایش می‌دهیم.

$\inf B\in B$ — مینیمم — $\min B$

د) عنصر $b\in B$ را عنصر ماکزیمال B (یا بیشینِ B) می‌گوییم هرگاه $\forall x\in B; (x\succeq b \Rightarrow x=b)$

مینیمال — کمینِ — $\preceq$

مثال)



$A=\{g,a,b,c,d,e,f\}$

$\preceq=\{(a,b),(b,c),(b,d),(a,c),(a,a),(b,b),\dots,(f,f)\}$

$B=\{f,a,b,c,e\}$

مجموعه کران‌های بالای $B=\{\ \}$ ، مجموعه کران‌های پایین $B=\{a\}$ ، $\inf B=a$ ، $\sup B$ وجود ندارد

مجموعه عناصر مینیمال $B=\{a\}$ ، مجموعه عناصر ماکزیمال $B=\{e,f\}$

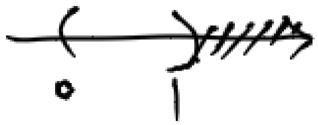
مجموعه کران‌های بالای $A\ (=B)=\{\ \}$ ، مجموعه کران‌های پایین $A=\{a\}$ ، $\sup A$ وجود ندارد ، $\inf A=a \in A \Rightarrow a=\min A$

مجموعه عناصر مینیمال $=\{a\}$ ، مجموعه عناصر ماکزیمال $=\{g,e,f\}$

مجموعه کرانهای بالای $(0,1)$ $= [1, \infty)$

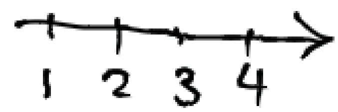
مثال ۲) $(\mathbb{R}, \leq)$ را در نظر می‌گیریم

$\mathbb{R} = A$ ، $\leq$ معمولی



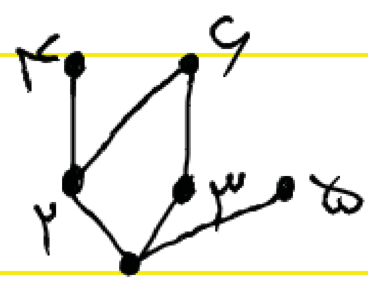
$\sup(\underbrace{(0,1)}_{B}) = 1 \notin B \Rightarrow \max B$ وجود ندارد

$\sup \mathbb{N}$ ندارد زیرا $\mathbb{N}$ از بالا کراندار نیست , $\inf \mathbb{N} = 1 \in \mathbb{N}$, $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N}$



مثال ۳) $(\{1,2,\dots,6\}, |)$ را در نظر بگیرید. ($|$: عاد کردن)

$| = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ رابطه ترتیب جزئی



$a | b \Leftrightarrow a \preccurlyeq b$

$\max A$ ندارد ، A کران بالا ندارد ، A سوپریمم ندارد

$\min A = 1$ ، مجموعه کرانهای پایین A $= \{1\}$ ، $\inf A = 1$

مجموعه عناصر ماکزیمال $= \{4,6,5\}$

مجموعه عناصر مینیمال $= \{1\}$

مثال ۴) $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \supseteq)$ رابطه شمول

$C \preccurlyeq D \Leftrightarrow C \supseteq D$

$(\{1,2,3\}, \{1\}) \in \supseteq$

$B=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ مجموعه کران‌های پایین $B = \{\emptyset,\{1\}\}$ $\sup B=\{1\}$

$\{1\}\supseteq\emptyset$ $\cancel{\emptyset\supseteq\{1\}}$

مجموعه کران‌های بالای $B = \{1,2,3\}$, $\inf B=\{1,2,3\}$

$? \supseteq \{1\},\ \{1,2\},\ \{1,2,3\}$

مجموعه عناصر ماکزیمال $= \{\{1\}\}$ مجموعه عناصر مینیمال $= \{\{1,2,3\}\}$

$? \supseteq \{1\},\ \{1,2\},\ \{1,2,3\} \Rightarrow ? = \{1\},\ \{1,2\},\ \{1,2,3\}$

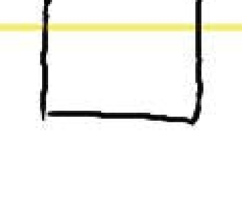
$? \supseteq \{1,2,3\} \Rightarrow ? = \{1,2,3\}$

$\{1,2\}$ ماکزیمال B نیست زیرا $\{1,2\}\supseteq\{1\}$

قضیه. ثابت کنید اگر a عنصر ماکزیمم $(A,\le)$ باشد آنگاه a عنصر ماکزیمال A نیز است.

$\boxed{\forall x\in A;\ x\le a\in A}$ $\boxed{\forall x\in A;\ (a\le x \Rightarrow x=a)}$

برهان: فرض کنیم $x\in A$ دلخواه باشد و فرض کنیم $a\le x$ (1). چون a عنصر ماکزیمم A است پس $x\le a$ (2). بنابه تقارن $x=a$. □



نکته

x حرف کوچک — $\mathcal{X}$ حرف کوچک در ابعاد بزرگ — X حرف بزرگ — $\times$ حرف بزرگ در ابعاد کوچک

اگر تلاش نکنید تا ضعف‌های خودتان را برطرف نکنید، مشکل شما حل نمی‌شود.

این درس و ریاضی اصلاً احتیاج به $\boxed{\text{دقت}}$ دارد.

هیجان در خودتان تزریق کنید
باید درس بخوانید

سوپریمم و اینفیمم در $\mathbb{R}$ $\equiv$

اصل موسوم به اصل کمال وجود دارد که می‌گوید هر مجموعهٔ
از بالا کراندار، سوپریمم دارد. $\mathbb{R}$ این خاصیت را دارد ولی $(\mathbb{Q},<)$ معمولی چنین نیست

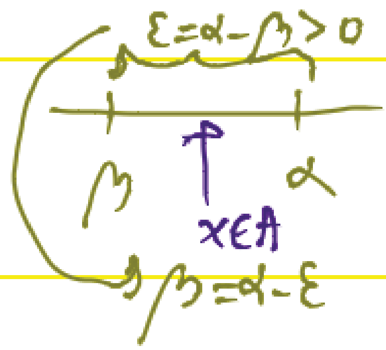
زیرا $\{x\in\mathbb{Q};\ x^2<2\}$ دارای سوپریمم در $\mathbb{Q}$ نیست.

$\alpha=\sup A$ هرگاه
۱) اولاً α یک کران بالا باشد
۲) α کوچکترین کران بالا باشد
یعنی هر عدد کوچکتر از α دیگر کران بالای A نیست
به عبارت دیگر به ازای هر $(\alpha\varepsilon)$، $\alpha-\varepsilon$ دیگر کران بالای A نیست

$\sim \forall x\in A;\ x\le\alpha-\varepsilon$

$\exists x\in A;\ x>\alpha-\varepsilon$ یعنی

قضیه. اگر $\alpha=\sup A$ آنگاه $-\alpha=\inf(-A)$.



$-A=\{-x \mid x\in A\}$

برهان. اولاً برای هر $x\in A$، $x\le\alpha$ (زیرا α کران بالای A است)

در نتیجه $-\alpha\le -x$ پس $-\alpha$ کران پایین $-A$ است.

ثانیاً - فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چون $\alpha=\sup A$ ،

$$\exists x\in A;\quad \alpha-\varepsilon<x$$

لذا $-x<-\alpha+\varepsilon$ ..

بنابراین $-\alpha=\inf(-A)$. □

قضیه ۲: $\sup(A+B)=\underbrace{\sup A}_{\alpha}+\underbrace{\sup B}_{\beta}$ که $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$ آن .

برهان. اولاً -

$$\left.\begin{array}{l}\forall a\in A;\ a\le\alpha\\ \forall b\in B;\ b\le\beta\end{array}\right\}\Rightarrow a+b\le\alpha+\beta\Rightarrow\forall c\in A+B;\ c\le\alpha+\beta.$$

ثانیاً - فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چون $\alpha=\sup A$ ، داریم $\exists a\in A;\ \alpha-\frac{\varepsilon}{2}<a$ (1)

و چون $\beta=\sup B$ پس $\exists b\in B;\ \beta-\frac{\varepsilon}{2}<b$ (2) . بنابه (1),(2) ، داریم

$$\underbrace{(\alpha-\tfrac{\varepsilon}{2})+(\beta-\tfrac{\varepsilon}{2})}_{(\alpha+\beta)-\varepsilon}<\underbrace{a+b}_{\in A+B}.\ \square$$

تمرین: چرا $\sup(A+B)\le\sup A+\sup B$ ؟

$$\forall a\in A\ \forall b\in B;\quad \underbrace{a+b\le\sup A+\sup B}$$

کران بالا $A+B$

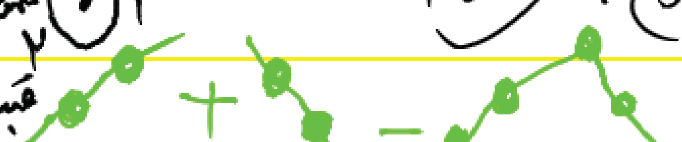
بی خودی

جابجایی

۱ منفی

۲+۲

قسمت انتگرال‌ها



قضیه: اگر $A\subseteq B$ آنگاه $\underbrace{\sup A}_{\alpha}\le\underbrace{\sup B}_{\beta}$ و $\inf A\ge\inf B$

اثبات: $\forall a\in A;\quad a\in A\xRightarrow{A\subseteq B}a\in B\xRightarrow{\beta=\sup B}a\le\beta$

پس β کران بالایی برای A است لذا $\alpha=\sup A\le\beta$. $\square$

$$A\subseteq B\Rightarrow -A\subseteq -B\xRightarrow[\text{اول قضیه}]{\text{بنابه قسمت}}\sup(-A)\le\sup(-B)\xRightarrow[\text{قضیه}]{\text{بنابه}}\underbrace{-\sup(-A)}_{\inf A}\ge\underbrace{-\sup(-B)}_{\inf B}$$

قضیه: اگر $\forall a\in A\ \exists b\in B;\ a\le b$ آنگاه $\underbrace{\sup A}_{\alpha}\le\underbrace{\sup B}_{\beta}$

اثبات: به برهان خلف فرض کنیم $\underset{\sup A}{\alpha}>\beta$. پس β کران بالا A نیست.

لذا $a_0\in A$ ی وجود دارد که $\beta<a_0$ (۱). بنابه فرض $b_0\in B$ ی هست که $a_0\le b_0$ (۲).

از طرفی $b_0\le\underset{\sup B}{\beta}$ (۳). بنابه ۱، ۲، ۳ داریم $\beta<\beta$. تناقض. $\square$

تمرین: اگر $\forall x\in D_f=D_g;\ f(x)\le g(x)$ آنگاه $\sup_{x\in D_f}f(x)\le\sup_{x\in D_g}g(x)$

تابع

تعریف: یک رابطه f از X به Y به طوری که هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای مولفه اول برابر نباشند.

یک تابع f با سه چیز مشخص می‌شود: الف) مجموعه آغاز X ب) مجموعه پایان Y ج) مجموعه زوج‌های مرتبی که f را تشکیل می‌دهد.

یا دو چیز مشخص می‌شود: ج۱) حوزه تعریف f ج۲) ضابطه f

یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$، $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، تابع حقیقی خوانده می‌شود و می‌تواند با ضابطه‌اش مشخص شود زیرا به کمک ضابطه، حوزه تعریف تابع به عنوان بزرگترین زیرمجموعه $\mathbb{R}$ که به ازای هر x در آن $f(x)$ معین است قابل مشخص شدن است. مثلاً $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ یک تابع است که در آن

مجموعه آغاز $= D_f=(0,\infty)$ و $\mathbb{R} = Y =$ مجموعه پایان.

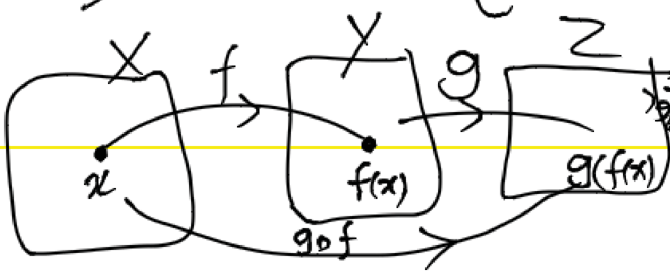
از اکنون به بعد در تعریف تابع همواره فرض می‌کنیم حوزه تعریف تابع با مجموعه آغاز آن مساوی است، پس ما با تابع‌هایی مانند

سروکار نداریم.

فرض ما براین است که با تابع‌های حقیقی معمولی نظیر ثابت، زوج و فرد آشنا هستید

همچنین اعمال جمع، ضرب، تفریق و تقسیم توابع دانسته شده فرض می‌شوند.

ضمناً شما با توابع حقیقی قدر مطلق، جزء صحیح و تابع علامت آشنا هستید.



تعریف. فرض کنید f و g دو تابع باشند. ترکیب آن‌ها $gof: X\to Z$ با ضابطه $(gof)(x)=g(f(x))$ تعریف می‌شود.

تعریف. تابع $f: X\to Y$ را پوشا (پوشش، پوروی) می‌گوییم هرگاه $R_f = Y$.

به عبارت دیگر: $\boxed{\forall y\in Y\ \exists x\in X;\ f(x)=y}$

$R_f \subseteq Y$ ، $R_f = \{f(x): x$

تعریف. تابع $f: X\to Y$ را یک به یک می‌گوییم هرگاه $\forall x,x'\in X;\ x\neq x' \Rightarrow f(x)\neq f(x')$

$f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$ ، D_f

$p\Rightarrow q \equiv \sim q\Rightarrow \sim p$

توجه کنید که وارون یک تابع، f، یک تابع است اگر f یک به یک و پوشا باشد.

زیرا $f^{-1}: Y\to X$ تابع است هرگاه

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = R_f = Y & \text{(پوشا بودن f)} \\ (y,x_1),(y,x_2)\in f^{-1} \xLeftrightarrow{} (x_1,y),(x_2,y)\in f \xLeftrightarrow{\text{f یک به یک است}} x_1=x_2 \end{cases}$$

زیرا f یک به یک — تعریف f^{-1}

$(y,x)\in f^{-1} \equiv (x,y)\in f \equiv y=f(x)$

فرق f و $f(x)$ و $y=f(x)$ چیست؟

f: تابع است، از جنس مجموعه زوج‌ها

$f(x)$: تصویر x تحت f است یعنی مؤلفه دوم در زوج $(x,y)\in f$ ، $f(x)$

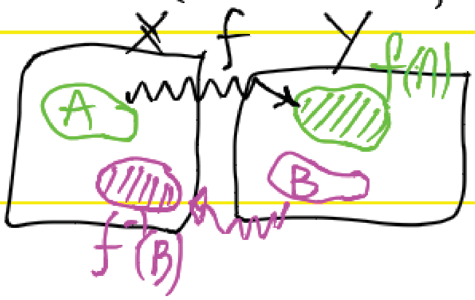
$y=f(x)$: ضابطه تابع، قانونی که مشخص می‌کند x به چه عضوی برده می‌شود. $D_f \ni x$

مثلاً وقتی می‌گوییم $f\le g$ یعنی $\forall x\in D_f=D_g;\ f(x)\le g(x)$

تعریف. فرض کنید $f: X\to Y$ یک تابع باشد و $A\subseteq X$ ، $B\subseteq Y$.

$f(A) = \{($

$f(A)=\{f(x):\ x\in A\}$, $f(B)=\{x\in X:\ f(x)\in B\}$

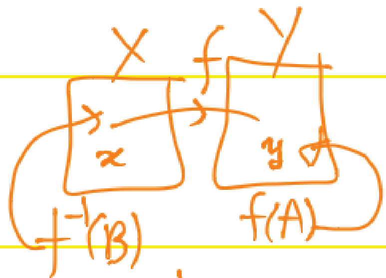


بنابراین

$x\in A \Rightarrow f(x)\in f(A)$

$y\in f(A) \Rightarrow \exists x\in A;\ f(x)=y$

$x\in f^{-1}(B) \boxed{\Leftrightarrow} f(x)\in B$



تمرین:

۱) $B_1\subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$

$x\in f^{-1}(B_1)\Rightarrow f(x)\in B_1 \xRightarrow{B_1\subseteq B_2} f(x)\in B_2 \Rightarrow x\in f^{-1}(B_2).\ \square$

۲) $f^{-1}(B_1\underset{\overset{\Delta}{\cap}}{\underline{\cup}} B_2)=f^{-1}(B_1)\ \underset{\overset{\Delta}{\cap}}{\underline{\cup}} f^{-1}(B_2)$

$x\in f^{-1}(B_1\cup B_2)\Leftrightarrow f(x)\in B_1\cup B_2 \Leftrightarrow f(x)\in B_1 \vee f(x)\in B_2 \Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\vee x\in f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2).\ \square$

۳) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$

$y\in f(f^{-1}(B))\Rightarrow \exists\, \underbrace{x\in f^{-1}(B)}_{\equiv f(x)\in B};\ y=f(x) \Rightarrow y\in B.\ \square$

۴) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$

$x\in A\Rightarrow f(x)\in \underbrace{f(A)}_{B} \Rightarrow x\in f^{-1}(\underbrace{B}_{f(A)}).\ \square$

۵) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

$y\in f(A\cap B)\Rightarrow \exists x\in A\cap B;\ y=f(x) \Rightarrow x\in A,\ x\in B,\ y=f(x)$

$\Rightarrow f(x)\in f(A)\ \&\ f(x)\in f(B) \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{y}\in f(A)\cap f(B).\ \square$

تمرین

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

حل

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A;\ y = f(x) \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B,\ y = f(x) \Rightarrow y \in \underbrace{f(B)}_{\{f(u)\,:\,u \in B\}}.\ \square$$

تمرین.

$$A \subseteq X \ \&\ B \subseteq Y \Rightarrow f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$$

حل

$$y \in f(A \cap f^{-1}(B)) \Rightarrow y = f(x),\ \underbrace{x \in A \cap f^{-1}(B)}_{x \in A \ \&\ x \in f^{-1}(B)} \Longrightarrow y = f(x) \in f(A) \ \&\ \underset{\substack{\parallel \\ y}}{f(x)} \in B$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \cap B$$

$$\therefore\ f(A \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cap B$$

$$y \in f(A) \cap B \Rightarrow y \in f(A) \ \&\ y \in B \Rightarrow \exists x \in A;\ y = f(x) \ \&\ \underbrace{\overset{y = f(x)}{\in B}}_{\equiv\, x \in f^{-1}(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A \cap f^{-1}(B) \ \&\ y = f(x) \Rightarrow y \in f(A \cap f^{-1}(B)).$$

$$\therefore\ f(A) \cap B \subseteq f(A \cap f^{-1}(B)).\ \square$$

قضیه*. تابع $f: X \to Y$ یک به یک است اگر و تنها اگر $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

برهان. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم f یک به یک باشد.

$$A_1 \cap A_2 \subseteq A_i \ (i = 1, 2) \Longrightarrow f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_i) \ (i = 1, 2) \Rightarrow f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq B \cap C$$

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists x_1 \in A_1;\ y = f(x_1) \\ \exists x_2 \in A_2;\ y = f(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) = y = f(x_2) \xRightarrow{f\ \text{یک به یک}}$$

$\underset{A_1}{x_1} = \underset{A_2}{x_2} \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow y = f(x_1) \in f(A_1 \cap A_2).$

$\therefore f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2).$ ////

($\Rightarrow$) فرض کنیم برای هر دو زیرمجموعه A_1 و A_2 از X داشته باشیم $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

باید ثابت کنیم f یک به یک است.

$x_1 \neq x_2$

$\left.\begin{matrix} A_1 = \{x_1\} \\ A_2 = \{x_2\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ فرض $\underbrace{f(A_1 \cap A_2)}_{\emptyset \ (x_1 \neq x_2 \text{ زیرا})} = f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\square$

$\emptyset$ $\{f(x) : x \in \emptyset\} = \{\}$

تمرین:

$\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$

حل: فرض کنیم $x \in A \cup C$. پس $x \in A$ یا $x \in C$. دو حالت روی می‌دهد:

الف) اگر $x \in A$، چون $A \subseteq B$ پس $x \in B$، لذا $x \in B \cup D$.

ب) اگر $x \in C$، " $C \subseteq D$ " $x \in D$، " " .

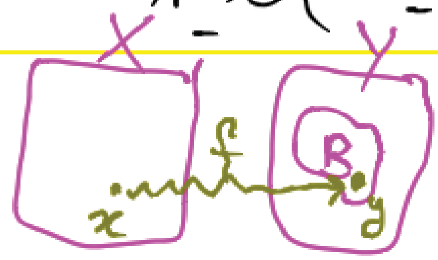
در هر حال $x \in B \cup D$. $\square$

قضیه: $f : X \to Y$ پوشاست اگر و فقط اگر $f(f^{-1}(B)) = B$

برهان: ($\Leftarrow$) قبلاً نشان داده‌ایم که $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

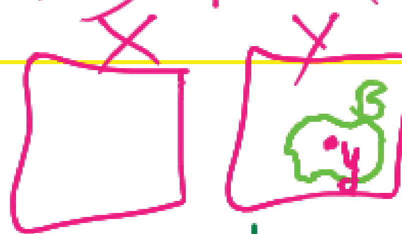
$y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B) ; y = f(x) \Rightarrow \underset{y = f(x)}{f(x) \in B} \Rightarrow y \in B$

اثبات) می‌دهیم $B\subseteq f(f^{-1}(B))$: فرض کنیم $y\in B$. چون f پوشاست $x\in X$ وجود دارد که $y=f(x)$ پس $f(x)\in B$ لذا $x\in f^{-1}(B)$ پس $f(x)\in f(f^{-1}(B))$.



$(\Rightarrow)$ فرض کنیم برای هر $B\subseteq Y$ داشته باشیم $\underbrace{f(f^{-1}(B))=B}$ باید نشان دهیم f پوشاست:

فرض کنیم $y\in Y$. قرار می‌دهیم $B=\{y\}$. بنابر فرض $f(f^{-1}(\{y\}))=\{y\}$

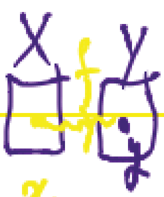


پس $y\in\{y\}= f(\underbrace{f^{-1}(\{y\})}_{A})$ پس $x\in A=f^{-1}(\{y\})$ وجود دارد که $f(x)=y$. □

تمرین: تابع $f:X\to Y$ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر برای هر $A\subseteq X$، $f^{-1}(f(A))=A$.

$\boxed{f=g \iff \forall x;\ f(x)=g(x)}$

قضیه*: تابع $f:X\to Y$ یک‌به‌یک و پوشاست اگر و تنها اگر



$\exists g:Y\to X;\quad g\circ f=I_{X:X\to X}$ & $f\circ g=I_{Y:Y\to Y}$ تابع همانی

برهان: $(\Leftarrow)$ فرض کنیم f یک‌به‌یک و پوشا باشد پس f^{-1} به عنوان تابع $Y\to X$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $g=f^{-1}$.

$(g\circ f)(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{y})=f^{-1}(y)=x=I_X(x)$. $(f\circ g)(y)=\dots=I_Y(y)$. ////

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $g:Y\to X$ وجود دارد که $g\circ f=I_X$، $f\circ g=I_Y$.

تابع g

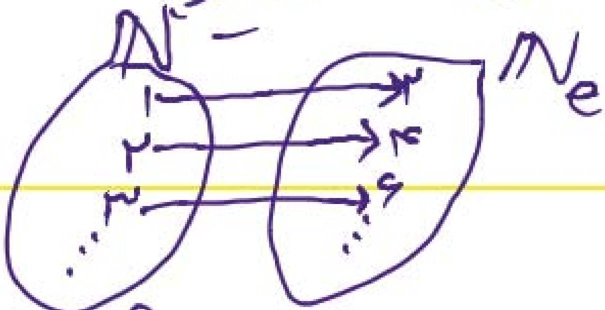
$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))\Rightarrow (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\Rightarrow I_X(x_1)=I_X(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

$y\in Y\Rightarrow (f\circ g)(y)=I_Y(y)=y\Rightarrow y=f(g(y))\Rightarrow x\in X$ & $y=f(x)$. □

مجموعه متناهی و نامتناهی

تعریف. مجموعه X را نامتناهی خوانیم هرگاه با یک زیرمجموعه سره اش ($\neq X$) در تناظر یک به یک باشد. در غیر این صورت آن را متناهی می گوییم.

مثال ۱)



$f(n)=2n$

اثبات یک به یک بودن: $f(n_1)=f(n_2) \Rightarrow 2n_1=2n_2 \Rightarrow n_1=n_2$

اثبات پوشا بودن: فرض کنیم $m\in\mathbb{N}_e$ ... که $\frac{m}{2}\in\mathbb{N}$ و $f\left(\frac{m}{2}\right)=m$

$2n=m \Rightarrow n=\frac{m}{2}$

۲) $\{a\}$ متناهی است زیرا تنها زیرمجموعه سره اش $\emptyset$ است و هیچ تناظر یک به یکی بین $\{a\}$ و $\emptyset$ وجود ندارد لذا $\{a\}$ نامتناهی نیست لذا متناهی است.

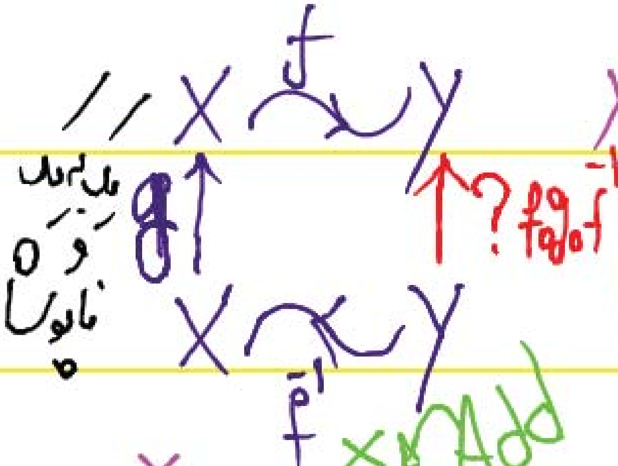
زیرا اگر $f:\{a\}\to\emptyset$ تناظر یک به یک باشد آنگاه $f(a)\in\emptyset$ لذا $\emptyset$ عضو دارد. اما $\emptyset$ هیچ عضوی ندارد. $\times$.

۳) $\emptyset$ متناهی است زیرا $\emptyset$ زیرمجموعه سره ندارد.

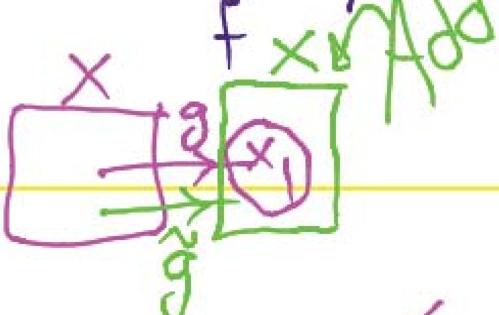
تعریف: اگر $X\to Y$ یک تناظر یک به یک باشد، می گوییم X,Y هم عددند و می نویسیم $X\approx Y$ یا $X\sim Y$ یا $f:X\sim Y$

$\times$

قضیه ۱. اگر $f: X \sim Y$ و X نامتناهی باشد آنگاه Y نیز نامتناهی است.



نکته نفیس: اگر X نامتناهی باشد آنگاه یک زیرمجموعه سره از X مانند X_1 از X وجود دارد که $X \overset{g}{\sim} X_1$. در این صورت تابع

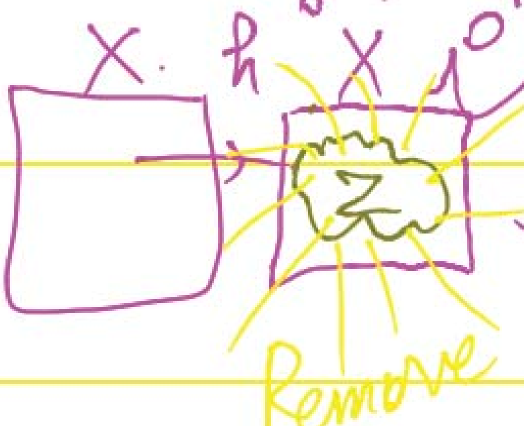


$$\begin{cases} \tilde{g}: X \to X \\ \tilde{g}(x) = g(x) \end{cases}$$ یک به یک است زیرا

$$\tilde{g}(x_1) = \tilde{g}(x_2) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \xRightarrow{g \text{ یک به یک}} x_1 = x_2$$

ضمناً $R_{\tilde{g}} = R_g = X_1 \neq X$

لذا اگر X نامتناهی باشد تابع یک به یکی از X به X وجود دارد که ناپوشا است.



بالعکس اگر $h: X \to X$ یک تابع یک به یک ناپوشا باشد، در این صورت با فرض $Z = h(X) = R_h$ در این صورت

تابع $$\begin{cases} \hat{h}: X \to Z \\ \hat{h}(x) = h(x) \end{cases}$$ تناظر یک به یک است زیرا

$$\hat{h}(x_1) = \hat{h}(x_2) \Rightarrow h(x_1) = h(x_2) \xRightarrow{h \text{ یک به یک}} x_1 = x_2 \quad \checkmark$$

$$R_{\hat{h}} = R_h = Z.$$

چون h ناپوشا است پس $Z = R_h \neq X$.

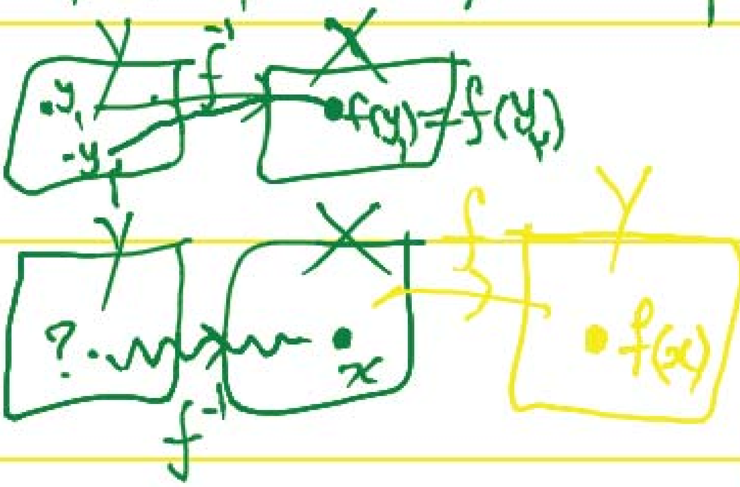
پس یک تناظر یک به یک ($\hat{h}$) بین X با زیرمجموعه سره اش (Z) پیدا کردیم. پس X نامتناهی است.

نکته سبز اگر $f: X\to Y$ تابعی یک به یک و پوشا باشد، دیدیم که $f^{-1}_{Y\to X}$ وجود دارد. اینک نشان می‌دهیم f^{-1} نیز یک به یک و پوشا است:

$$\boxed{f^{-1}(v)=u \iff (v,u)\in f^{-1} \iff (u,v)\in f \iff v=f(u)} \quad (♣)$$

$$f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2)=x \Rightarrow f(x)=y_1 \ \& \ f(x)=y_2 \xrightarrow{f \text{ تابع است}} y_1=y_2$$

پس f^{-1} یک به یک است:



اثبات پوشا بودن f^{-1}:

فرض کنیم $x_0\in X$. در این صورت:

$f^{-1}(f(x_0))=x_0$ و $f(x_0)\in Y$ □

فرض کنیم $y_0=f(x_0)$. پس بنابه (♣) $x_0=f^{-1}(y_0)$. لذا $x_0=f^{-1}(f(x_0))$.

قضیه. اگر $f: X \to Y$ یک تناظر یک به یک باشد و X نامتناهی باشد آنگاه Y نیز نامتناهی است.

$x_0 \rightsquigarrow f(x_0)$

$\forall x;\ g(x) \neq x_0$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X \arrow[u, "g"] & Y \arrow[l, "f^{-1}"] \arrow[u, dashed, "?"'] \end{tikzcd}$$

$\boxed{f\circ g\circ f^{-1}=h}$

برهان. چون X نامتناهی است پس تابع یک به یک و ناپوشایی مانند $g: X\to X$ وجود دارد. چون f تناظر یک به یک است پس f^{-1} وجود دارد و ضمناً تناظر یک به یک است. قرار می‌دهیم $h=f\circ g\circ f^{-1}$. نشان می‌دهیم h یک به یک و ناپوشا است و این نشان می‌دهد که Y نامتناهی است:

$$h(y_1)=h(y_2) \Rightarrow f(g(f^{-1}(y_1)))=f(g(f^{-1}(y_2))) \xRightarrow{f\ \text{یک به یک است}} g(f^{-1}(y_1))=g(f^{-1}(y_2))$$

$$\xRightarrow{g\ \text{یک به یک است}} f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2) \xRightarrow{f\ \text{تابع است}} f(f^{-1}(y_1))=f(f^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1=y_2.$$

$f\circ f^{-1}=I_Y$

$\therefore$ h یک به یک است.

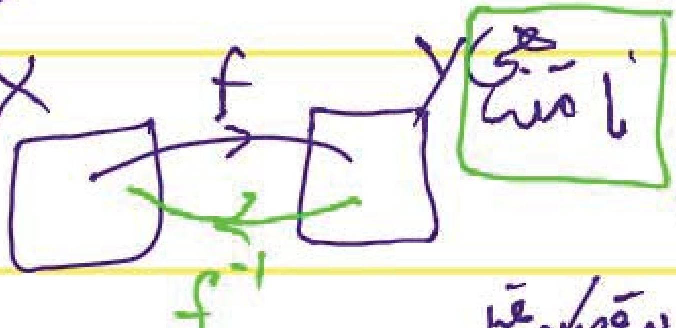
چون g ناپوشاست پس $x_0\in X$ ای وجود دارد که $\forall x\in X;\ g(x)\neq x_0$. نشان می‌دهیم $f(x_0)\in Y$ توسط h پوشانده نمی‌شود یعنی $\forall y\in Y;\ h(y)\neq f(x_0)$.

برای اثبات این مطلب به برهان خلف فرض کنیم $\underline{\exists y_0\in Y;\ h(y_0)=f(x_0)}$.

خلف

پس $f(g(f^{-1}(y_0)))=f(x_0)$. بنابه یک به یک بودن f، $g(f^{-1}(y_0))=x_0$ یعنی نقطه‌ای مانند $f^{-1}(y_0)\in X$ یافتیم که تصویر آن تحت g با x_0 برابر است. یعنی x_0 توسط g پوشانده شد. ✗ □

قضیه. اگر $f: X \to Y$ تناظر یک به یک باشد و X متناهی باشد آنگاه Y نیز متناهی است.



برهان خلف. فرض کنیم Y نامتناهی باشد.

چون $f^{-1}: Y \to X$ تناظر یک به یک است، بنابر قضیه قبل نتیجه می‌شود که X نامتناهی است. اما بنابه فرض X متناهی است. $\therefore$ پس Y متناهی است. $\square$

تمرین. اگر X نامتناهی باشد و $x_0 \in X$ آنگاه $X - \{x_0\}$ نامتناهی است.

تحویل: شنبه ۲/۹/۹۲

تعریف. برای هر k، $\mathbb{N}_k = \{1, \dots, k\}$ را قطعه‌ای از اعداد طبیعی می‌گویند.

استقرای ریاضی: هرگاه بخواهیم نشان دهیم گزاره‌ی مانند $\forall n \geq m;\ P(n)$ درست است نشان می‌دهیم اولاً $P(m)$ درست است. ثانیاً درستی $P(k)$ درستی $P(k+1)$ را نتیجه می‌دهد.

قضیه. برای هر k، $\mathbb{N}_k$ متناهی است.

برهان. استقرای ریاضی را به کار می‌بریم. اولاً $\mathbb{N}_1 = \{1\}$ متناهی است. ثانیاً فرض کنیم $\mathbb{N}_k$ متناهی باشد.

فرض می‌کنیم $\mathbb{N}_{k+1}$ متناهی است. به برهان خلف اگر $\mathbb{N}_{k+1}$ نامتناهی باشد آنگاه

پس بنابه $\mathbb{N}_{k+1}-\{k+1\}=\mathbb{N}_k$ نامتناهی است که خلاف فرض است. پس $\mathbb{N}_{k+1}$ متناهی است. $\square$

قضیه. یک مجموعه X متناهی است $\underset{\Leftrightarrow}{\text{اگر}}$ X هم‌عدد با یک $\mathbb{N}_k$ باشد. $\exists k;\ X\sim\mathbb{N}_k$

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنیم $X\sim\mathbb{N}_k$. بنابه قضیه قبل، $\mathbb{N}_k$ متناهی است. پس بنابه قضیه ...، X متناهی است. ////

($\Rightarrow$) نشان می‌دهیم اگر برای هر k، $X\nsim\mathbb{N}_k$ آنگاه X نامتناهی است. عکس نقیض ($\Leftarrow$)

چون X ناتهی است پس نقطه‌ای مانند $\boxed{x_1}$ دارد. ~~اگر $X-\{x_1\}=\emptyset$ آنگاه $X=\{x_1\}\sim\mathbb{N}_1$~~

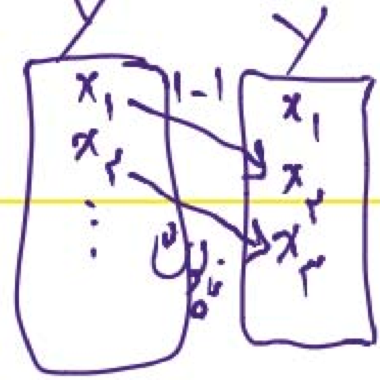
~~که خلاف فرض ما است. پس $X-\{x_1\}\neq\emptyset$. بنابراین عضوی مانند x_2 دارد به طوری که $x_1\neq x_2$~~

فرض کنیم $x_1,\dots,x_k$ انتخاب شده باشند. $X-\{x_1,\dots,x_k\}\neq\emptyset$ زیرا در غیر این صورت $X=\{x_1,\dots,x_k\}\sim\mathbb{N}_k$ که خلاف فرض است. پس $x_{k+1}\in X-\{x_1,\dots,x_k\}$ وجود دارد. با این ترتیب به مجموعه ذیل از اعضای X دست یافتیم:

$$Y=\{x_1,x_2,\dots\}$$

خطای استقرائی

فرض کنید بخواهیم مجموعه‌ای از اشیاء را بسازیم. ابتدا شیء a_1 را معرفی می‌کنیم. سپس فرض می‌کنیم $a_1,\dots,a_k$ ساخته شده است آنگاه روشی برای ساخت a_{k+1} از روی k شیء قبلی به دست می‌دهیم.



آنگاه تعریف می‌شود که تابع:

$$\begin{cases} f: Y \longrightarrow Y \\ f(x_n) = x_{n+1} \end{cases}$$

یک به یک و ناپوشاست:

1) $f(x_n) = f(x_m) \Rightarrow x_{n+1} = x_{m+1} \Rightarrow n+1 = m+1 \Rightarrow n = m \Rightarrow x_n = x_m$

2) $n+1 > 1$ پس برای هر n، $f(x_n) = x_{n+1} \neq x_1$.

پس Y نامتناهی است. لذا X که ابرمجموعه Y است نیز نامتناهی است. $\square$

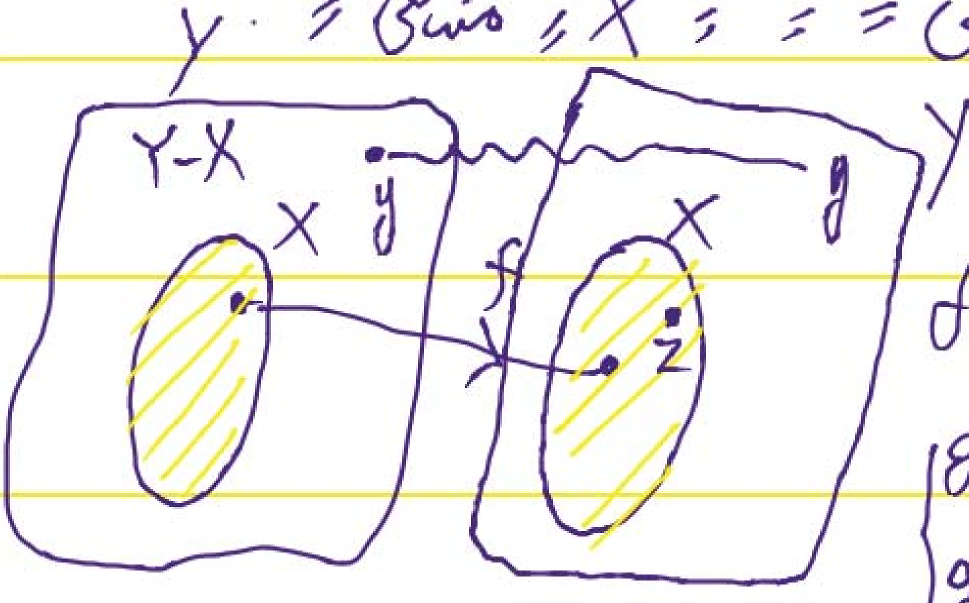
لم (الف) اگر $X \subseteq Y$ و X نامتناهی باشد آنگاه Y نیز نامتناهی است.

ب) اگر $X \subseteq Y$ و Y متناهی باشد آنگاه X نیز متناهی است.

برهان. الف)

قضیه: (الف) اگر $X \subseteq Y$ و X نامتناهی باشد، آنگاه Y نیز نامتناهی است.

ب) 〃 〃 Y متناهی 〃 〃 〃 X 〃 متناهی 〃 Y.



برهان: چون X نامتناهی است تابع یک‌به‌یک ناپوشای $f: X \to X$ وجود دارد. تابع

$$g: Y \to Y$$

$$g(y) = \begin{cases} f(y) & y \in X \\ y & y \in Y - X \end{cases}$$

نشان می‌دهیم g یک‌به‌یک و ناپوشا است، در این صورت Y نامتناهی می‌شود:

$$g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow \begin{cases} f(y_1) = f(y_2) \xRightarrow{f \text{ یک‌به‌یک}} y_1 = y_2 & y_1, y_2 \in X \\ y_1 = y_2 & y_1, y_2 \in Y - X \\ \underbrace{f(y_1)}_{\in X} = \underbrace{y_2}_{\in Y-X} \quad \text{ممکن نیست زیرا } X \cap (Y-X) = \emptyset & y_1 \in X \ \& \ y_2 \in Y - X \\ y_1 = f(y_2) \quad \text{ممکن نیست} & y_1 \in Y - X \ \& \ y_2 \in X \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2$$

پس g یک‌به‌یک است.

چون f ناپوشا است پس $z \in X$ هست که $\underbrace{\forall x \in X;\ f(x) \neq z}_{(\clubsuit)}$. در این صورت

$$\forall y \in Y;\ g(y) \neq z \quad (\lozenge)$$

زیرا در غیر این صورت $\underset{(*)}{\text{چنین}}$ $y \in Y$ باشد که $g(y) = z$ آنگاه یا (i) $y \in X$ یا (ii) $y \in Y - X$.

(i) اگر $y \in X$، آنگاه $f(y) = g(y) = z$ که خلاف فرض $(\clubsuit)$ است.

(ii) اگر $y \in Y - X$ آنگاه $X \ni z = g(y) = y \in Y - X$ که ممکن نیست.

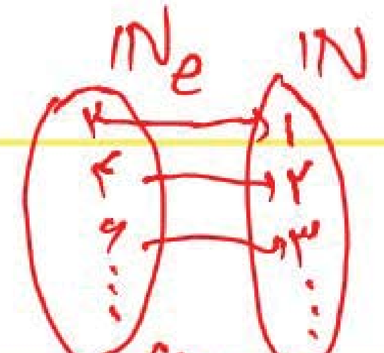
در هر حال به تناقض رسیدیم. پس ادعای (۲) درست است. پس حکم ثابت است. ////

ب) اگر X نامتناهی باشد، بنا به (الف)، Y نیز نامتناهی می‌شود که خلاف فرض است. پس X متناهی است.

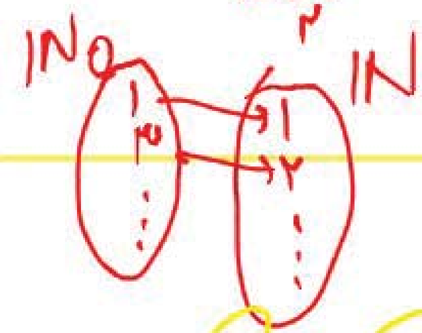
تعریف - اگر $X \sim \mathbb{N}$، X را شمارا نامتناهی می‌گویند.

- اگر X متناهی یا شمارا نامتناهی باشد، آن را شمارا می‌گویند.

- اگر X شمارا نباشد آن را ناشمارا می‌گویند.



$f(n)=\frac{n}{2}$



مثال ۱. $\mathbb{N}_e$، $\mathbb{N}_o$، $\mathbb{Z}$ شمارا نامتناهی اند:

$$f(x)=\begin{cases} -2x & x<0 \\ 2x+1 & x\geq 0 \end{cases}$$

۲) $\mathbb{Q}^{>0}$ شمارا نامتناهی است:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \cdots \end{array}$$

قضیه. اگر $A \overset{f}{\sim} B$ ، $C \overset{g}{\sim} D$ آنگاه $A\times C \overset{h}{\sim} B\times D$ که در آن

$$h(a,c) = (f(a), g(c))$$

اثبات: $h(a_1,c_1)=h(a_2,c_2) \Rightarrow (f(a_1),g(c_1))=(f(a_2),g(c_2)) \Rightarrow \begin{cases} f(a_1)=f(a_2)\\ g(c_1)=g(c_2)\end{cases}$

$$\xRightarrow[g \text{ یک‌به‌یک}]{f \text{ یک‌به‌یک}} \begin{cases} a_1=a_2\\ c_1=c_2\end{cases} \Rightarrow (a_1,c_1)=(a_2,c_2)$$

فرض کنیم $(b,d)\in B\times D$. پس $b\in B$ ، $d\in D$ چون f پوشاست پس $a\in A$ وجود دارد که $f(a)=b$. به دلیل مشابه $c\in C$ هست که $g(c)=d$. پس $h(a,c)=(f(a),g(c))=(b,d)$.
$(a,c)\in A\times C$

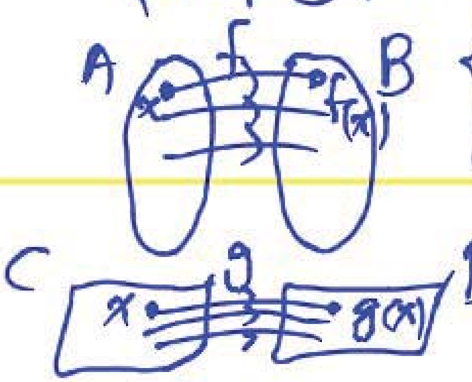
قضیه. اگر $A \overset{f}{\sim} B$ ، $C \overset{g}{\sim} D$ ، $A\cap C=\emptyset$ ، $B\cap D=\emptyset$ آنگاه $A\dot{\cup} C\sim B\dot{\cup} D$

اثبات: تابع

اجتماع جدا از هم

$$h: A\dot{\cup} C \to B\dot{\cup} D$$

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in A\\ g(x) & x\in C\end{cases}$$



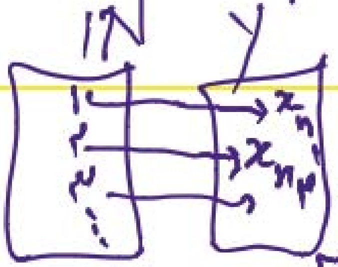
یک‌به‌یک و پوشاست.

قضیه. هر زیرمجموعه نامتناهی از یک مجموعه شمارا نامتناهی، شمارا نامتناهی است.

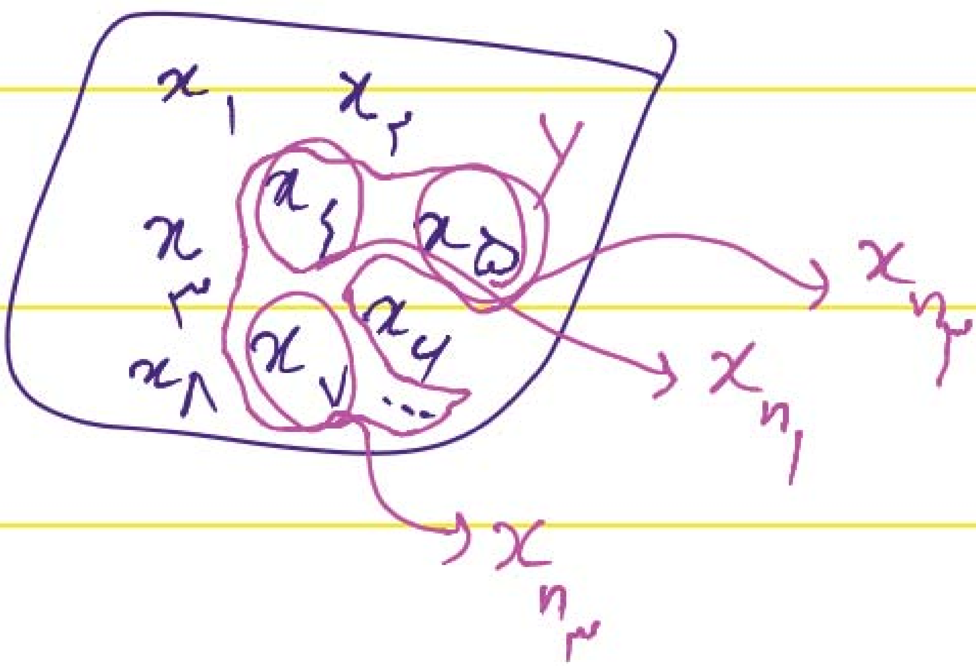
اثبات: چون X شمارا نامتناهی است. $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ دارد. $f:\mathbb{N}\to X$ ، $n\mapsto x_n$

$Y\neq\emptyset$ پس $\emptyset\neq \underbrace{\{m : x_m\in Y\}}_{A}\subseteq \mathbb{N}$ پس بنا به اصل خوش‌ترتیبی، A دارای عضو ابتدایی m_1 هم

n_1 هست. پس $x_{n_1}\in Y$ ، $Y-\{x_{n_1}\}\neq\emptyset$ (زیرا در غیر این صورت $Y=\{x_{n_1}\}$ متناهی است که خلاف فرض است) پس دوباره کوچکترین عدد طبیعی n_2 وجود دارد که $x_{n_2}\in Y-\{x_{n_1}\}$. با روش استقرایی

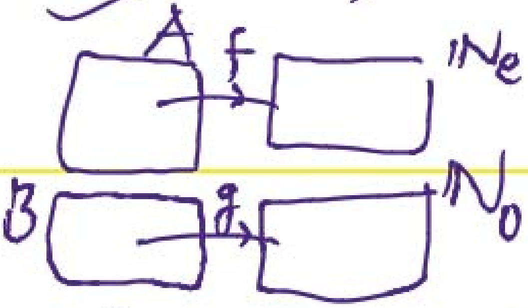


به دنباله $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ دست می‌یابیم. اینک تابع یک به یک و پوشاست پس $\mathbb{N}\sim Y$ یعنی Y شمارای نامتناهی است.



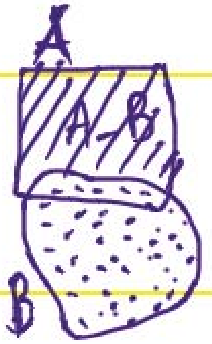
قضیه. اجتماع دو مجموعه‌ی شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

برهان. فرض کنیم A, B دو مجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشند. دو حالت رخ می‌دهد:



الف) $A\cap B=\emptyset$. بنابه فرض $\underbrace{A\sim\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_e}_{f}$, $\underbrace{B\sim\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_o}_{g}$

بنابه قضیه ... $A\cup B\overset{f\cup g}{\sim}\mathbb{N}_e\dot\cup\mathbb{N}_o=\mathbb{N}$. پس $A\cup B$ شمارای نامتناهی است.



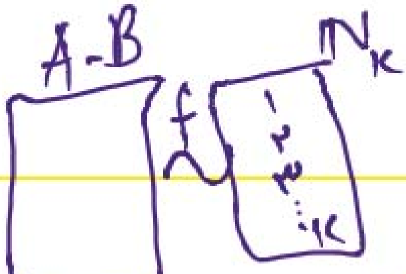
ب) $A\cap B\neq\emptyset$ مشاهده می‌شود $A\cup B=(A-B)\dot\cup B$.

چون $A-B\subseteq A$ پس $A-B$ متناهی یا نامتناهی است.

ب۱) $A-B$ نامتناهی است. پس بنابه قضیه «هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است» $A-B$ شمارای نامتناهی است.

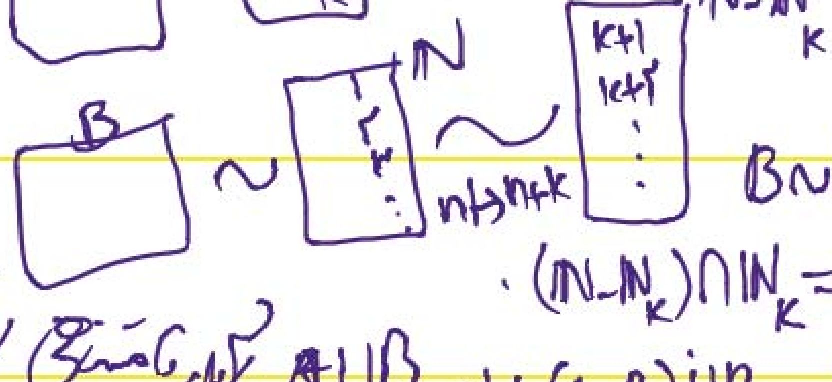
چون B نیز شمارای نامتناهی است و $(A-B)\cap B=\emptyset$ پس بنابه (الف) همین قضیه،

$(A-B)\dot\cup B(=A\cup B)$ شمارای نامتناهی است.



ب۲) $A-B$ متناهی است.

پس k هست که $A-B\sim\mathbb{N}_k$.



چون $B\sim\mathbb{N}\sim\mathbb{N}-\mathbb{N}_k$ پس $B\sim\mathbb{N}-\mathbb{N}_k$

ضمناً $(A-B)\cap B=\emptyset$ و $(\mathbb{N}-\mathbb{N}_k)\cap\mathbb{N}_k=\emptyset$.

پس بنابه قضیه ... $\underbrace{(A-B)\dot\cup B}_{=A\cup B}\sim\underbrace{\mathbb{N}_k\dot\cup(\mathbb{N}-\mathbb{N}_k)}_{=\mathbb{N}}$ پس $A\cup B$ شمارای نامتناهی است.

تمرین. اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.

قضیه. $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

برهان. تابع $\boxed{\begin{array}{l} f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ f(m,n)=2^m.3^n \end{array}}$ یک به یک است زیرا

$$f(m,n)=f(m',n')\Rightarrow 2^m.3^n=2^{m'}.3^{n'}\Rightarrow 2^m \mid 2^{m'}.3^{n'} \xrightarrow[\text{قضیه اقلیدس}]{(2^m,3^{n'})_{\text{بمم}}=1}$$

$$2^m \mid 2^m.3^n$$

$$\left.\begin{array}{l} a\mid bc \\ (a,b)_{\text{بمم}}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow a\mid c$$

$$2^m \mid 2^{m'} \Rightarrow m\le m'$$

به طور مشابه: $m'\le m$ ، $n\le n'$ ، $n'\le n$. پس $(m,n)=(m',n')$.

پس با توجه به اینکه هر تابع یک به یک (که می‌دانیم پوشا است یا ناپوشا است) نشان می‌دهیم که همواره در نظر بگیریم یک به یک است پس $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim \underbrace{f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}_{\text{برد } f}$. اما $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ نامتناهی است زیرا

$$\underbrace{\mathbb{N}\sim\{3.2^n \mid n\in\mathbb{N}\}}_{\text{نامتناهی}} \subseteq \{2^n.3^m \mid n,m\in\mathbb{N}\} = f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$$

یا اینکه $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ با A که

$$\underbrace{\{2^n.3^m \mid m,n\in\mathbb{N}\}}_{=f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}\sim\{2^{n+1}.3^{m+1} \mid n,m\in\mathbb{N}\}=A$$

$$2^n.3^m \longmapsto 2^{n+1}.3^{m+1}$$

$$\subsetneq$$

زیرمجموعه سره اش تناظر یک به یک دارد.

چون $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\subseteq\mathbb{N}$ (زیرمجموعه نامتناهی) بنابه قضیه قبلی، $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ شمارا نامتناهی است. اما دیدیم که $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. پس $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نیز شمارا نامتناهی است. □

قضیه. $\mathbb{Q}$ شمارا نامتناهی است.

برهان. قبلاً دیدیم که $\mathbb{Q}^{>0}$ شمارا نامتناهی است. چون $\mathbb{Q}^{>0} \sim_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}^{<0}$ $\left(f(t)=-t\right)$ پس $\mathbb{Q}^{<0}$ شمارا نامتناهی است. $\{0\}$ متناهی است. بنا به قضیه اول درس امروز،

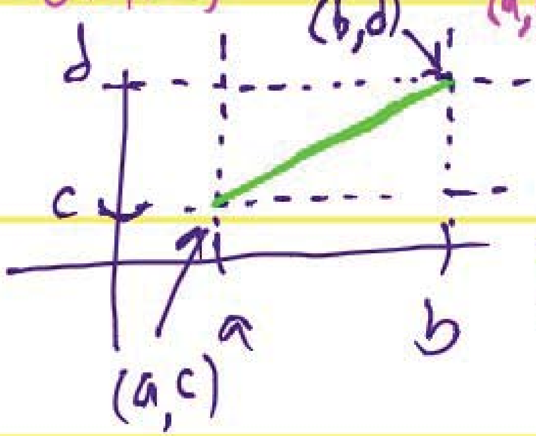
$$\underset{\mathbb{N}}{\mathbb{Q}} = \underset{\mathbb{N}_o-\{1\}}{\mathbb{Q}^{>0}} \cup \underset{\mathbb{N}_e}{\mathbb{Q}^{<0}} \cup \underset{\{1\}}{\{0\}}$$

شمارا نامتناهی است.

قضیه. اگر B, A شمارا نامتناهی باشند، آنگاه $A \times B$ نیز شمارا نامتناهی است.

برهان.

$$\left.\begin{array}{l} A \overset{f}{\sim} \mathbb{N} \\ B \overset{g}{\sim} \mathbb{N} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه}\ldots} A \times B \underset{(a,b)\mapsto(f(a),g(b))}{\sim} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \underset{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}}{\Longrightarrow} A\times B \sim \mathbb{N}. \square$$



تمرین ۱. بازه (a,b) و (c,d) هم‌عددند.

حل. تابع $f(x) = \dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ تناظر یک به یک است.

تمرین ۲. $\mathbb{R} \sim (-1,1)$

حل. تابع $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ یک به یک است.

قضیه ۴۲. بازه $(0,1)$ ناشماراست.

برهان. اولاً. $\frac{1}{2}\in(0,1)$ پس $(0,1)\neq\emptyset$. ثانیاً. چون $\{\frac{1}{n+1}: n\in\mathbb{N}\}\subseteq(0,1)$

$\wr$
$\mathbb{N}$ نامتناهی

پس $(0,1)$ نامتناهی است (متناهی نیست). ثالثاً. $(0,1)$ شمارا و نامتناهی نیز نیست:

(خ) فرض کنیم $\mathbb{N}\sim(0,1)=\{x_1, x_2, \ldots\}$. می‌دانیم هر عدد در $(0,1)$ دارای بسط

فرض

اعشاری ما که منحصر بفرد است (از نظر ما $0/1\bar{9}=0/2$). پس

$$
\begin{array}{l}
x_1 = 0/\, x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad \cdots \\
x_2 = 0/\, x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \quad \cdots \\
\vdots \\
x_i = 0/\, x_{i1} \quad x_{i2} \quad \cdots \quad x_{ii} \quad \cdots \\
\vdots
\end{array}
$$

(برهان قطری کانتور)

قرار می‌دهیم $\alpha=0/\alpha_1\alpha_2\ldots\in(0,1)$ که در آن

$$
\alpha_i := \begin{cases} 5 & x_{ii}=7 \\ 7 & x_{ii}\neq 7 \end{cases}
$$

در این صورت بوضوح α، در رقم i ام خود $\underbrace{}_{\alpha_i}$ با رقم i ام عدد x_i $\underbrace{}_{x_{ii}}$ مخالف است پس $\alpha\neq x_i$.

لذا $\alpha\notin(0,1)$!!. $\square$

نتیجه. $\mathbb{R}$ ناشماراست.

برهان. $\mathbb{R}\sim(-1,1)\sim(0,1)$. $\square$

قضیه: مجموعه اعداد گنگ ناشمارا است.

برهان: اگر $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ شمارا باشد، چون $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ اجتماع دو مجموعه ناشمارا می‌گردد.

از طرفی $\mathbb{Q}$ نیز شمارا نامتناهی است. لذا $\mathbb{R}$ شمارا می‌شود که ممکن نیست زیرا $\mathbb{R}$ ناشمارا است.

توجه کنید که $\left\{\frac{\sqrt{2}}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ لذا $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ نامتناهی است.

تمرین: $\{\sqrt{n} : n\in\mathbb{N}\}$ نامتناهی است.

تمرین: مجموعه اعداد اول P نامتناهی است.

حل: فرض کنیم $P=\{p_1,\dots,p_n\}$ متناهی باشد. قرار می‌دهیم $q=p_1p_2\cdots p_n+1$. این عدد بر هیچ یک از اعداد $p_1,\dots,p_n$ بخش‌پذیر نیست. پس اول است. از طرفی برای هر i، $q>p_i$ پس $q\notin P$. لذا $q\notin P$ ×

تمرین ۱: ثابت کنید اگر $g\circ f$ یک به یک باشد آنگاه f نیز یک به یک است.

تمرین ۲: اگر $g\circ f$ پوشا باشد آنگاه g نیز پوشا است.

تمرین ۳: ثابت کنید $A=\{1,4,9,16,\dots\}$ نامتناهی است.

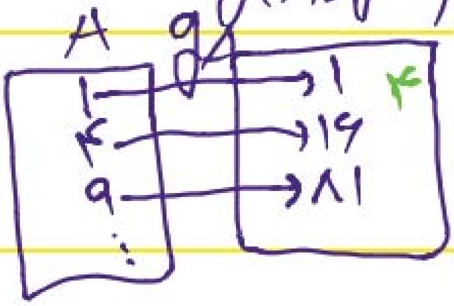
حل: راه اول) $\begin{cases} f:A\sim \mathbb{N} \\ f(x)=\sqrt{x} \end{cases}$ یک‌به‌یک و پوشاست.

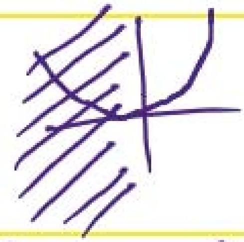
$\forall z\in \mathbb{N}\ \exists x=z^2;\ f(x)=\sqrt{z^2}=z$

چون $\mathbb{N}$ نامتناهی است، پس A نیز نامتناهی است.

راه دوم) تابع $\begin{cases} g:A\to A \\ g(x)=x^2 \end{cases}$ یک‌به‌یک و ناپوشاست.

$g(x)=g(x')\Rightarrow x^2=x'^2\Rightarrow |x|=|x'|\underset{A\subseteq\mathbb{N}}{\Rightarrow} x=x'$





g پوشا نیست زیرا $4\in A$ ولی $\forall x\in A;\ g(x)\neq 4$ زیرا

اگر $\exists x\in A;\ \underset{x^2}{g(x)}=4$ آنگاه $x=2\notin A$ ✗.

تمرین ۴) اگر A نامتناهی و B متناهی باشد آنگاه $A\cup B$ نامتناهی است.

حل. چون $A\subseteq A\cup B$، A نامتناهی است

پس بنابه قضیه «ابرمجموعه یک مجموعه نامتناهی، نامتناهی است»،

$A\cup B$ نامتناهی است. □

تمرین ۵. اگر A نامتناهی، B متناهی باشد، $B-A$ متناهی است. (حل: $B-A\subseteq B$ متناهی) زیرمجموعه متناهی

تمرین ۶) به ازای دو مجموعه X, Y، $Y\times X \sim X\times Y$.

حل) چون $\begin{cases} h: X\times Y \longrightarrow Y\times X \\ h(x,y)=(y,x) \end{cases}$ تناظر یک به یک است.

حل. چون $h(x,y)=h(x',y') \Rightarrow (y,x)=(y',x') \Rightarrow \begin{cases} y=y' \\ x=x' \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(x',y')$

پس h یک به یک است.

گیریم $(y_0,x_0)\in Y\times X$. مشاهده می‌شود که $(x_0,y_0)\in X\times Y$ و

$h(x_0,y_0)=(y_0,x_0)$.

پس h پوشاست. □

تمرین. اگر X ناشمارا باشد، $X\subseteq Y$، آنگاه Y نیز ناشماراست.

حل. گیریم Y شمارا باشد (نقیض). دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف) Y متناهی است. چون $X\subseteq Y$ پس X متناهی و لذا X شماراست که با فرض تناقض دارد.

ب) Y شمارا نامتناهی است. چون $X\subseteq Y$ پس بنابه قضیه ... X شمارا نامتناهی است پس

نامتناهی (زیرا ناشماراست)

شماراست که خلاف فرض است.

در هر حال به تناقض رسیدیم. پس Y ناشماراست. □

عدد اصلی

$\operatorname{Card} A$

به هر مجموعه A یک عدد اصلی α نسبت داده می‌شود که دارای خواص زیر است:

الف) $A = \emptyset \iff \operatorname{Card} A = 0$

ب) $A \sim B \iff \operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$

ج) $A \sim \mathbb{N}_k \iff \operatorname{Card} = k$

همچنین به ازای هر عدد اصلی m، لااقل یک مجموعه B که $\operatorname{Card} B = m$.

تعریف. می‌گوییم $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$ هرگاه $\exists B_1 \subseteq B;\ A \sim B_1$

مثال ۱) $2 \leq 5$ زیرا $\mathbb{N}_2 \sim \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_5$

مثال ۲) $\operatorname{Card}\{\text{خورشید}, \text{ماه}\} \leq \operatorname{Card} \mathbb{N}$ زیرا $\{\text{خورشید}, \text{ماه}\} \sim \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}$

ضمناً $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$ اگر تابع یک به یکی از A به B موجود داشته باشد.

$$\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B \Rightarrow \exists B_1 \subseteq B;\ A \overset{f}{\sim} B_1 \Rightarrow \underbrace{f: A \to B}_{\text{یک به یک است}}$$

$$\underbrace{f: A \to B}_{\text{یک به یک}} \Rightarrow A \sim f(A) \Rightarrow A \sim f(A) = B_1 \subseteq B$$

مثال ۳) $\operatorname{Card} \mathbb{N} \leq \operatorname{Card} \mathbb{R}$ زیرا $\begin{cases} f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 2x^3 + 1 \end{cases}$ یک به یک است.

قضیه (شرودر-برنشتاین). اگر $Card\, A \le Card\, B$ & $Card\, B \le Card\, A$ آنگاه $Card\, A = Card\, B$.

نکته. بجز صفر و مجموعه‌های متناهی، عدد اصلی یک عدد حقیقی نیست.
صفر و هر عدد طبیعی، یک عدد اصلی. به هر حال عدد اصلی، یک مفهوم تعریف نشده است.

نمادگذاری: $Card\, \mathbb{N} = \aleph_0$ (الف صفر) , $Card\, \mathbb{R} = c$.

(چون $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}$ پس $\aleph_0 \neq c$)

می‌نویسیم $Card\, A < Card\, B$ هرگاه $Card\, A \le Card\, B$ و $\underbrace{Card\, A \neq Card\, B}_{A \not\sim B}$.

تمرین. $n < \aleph_0$.

حل. $\mathbb{N}_n \subseteq \mathbb{N} \sim \mathbb{N}_n \Rightarrow \underbrace{Card\, \mathbb{N}_n}_{n} \le \underbrace{Card\, \mathbb{N}}_{\aleph_0}$

$Card\, \mathbb{N}_e \le Card\, \mathbb{N}$

اما $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{N}_n$ پس $n < \aleph_0$.

نکته. فرض کنید $f: A \to B$ یک به یک باشد پس $Card\, A \le Card\, B$. اگر این تابع پوشا نباشد نمی‌توان گفت $Card\, A < Card\, B$ زیرا ممکن است تحت تابع دیگری $A \sim B$.

تعریف. اگر α ، β دو عدد اصلی باشند و $\operatorname{Card} A = \alpha$ ، $\operatorname{Card} B = \beta$ آنگاه

می‌توان A و B را به گونه‌ای انتخاب کرد که $A \cap B = \emptyset$ (زیرا $A_1 = A \times \{\text{ابابا}\}$ و

$A \sim A_1$ ، $a \mapsto (a, \text{ابابا})$

$B_1 = B \times \{\text{احمدی نژاد}\}$ ، $B \sim B_1$ ، $b \mapsto (b, \text{احمدی نژاد})$ در این صورت

$$\begin{cases} \operatorname{Card} A_1 = \operatorname{Card} A = \alpha \\ \operatorname{Card} B_1 = \operatorname{Card} B = \beta \end{cases}$$

و خوشبختانه $\underbrace{(A_1 \cap B_1 = \emptyset}$

(زیرا اگر $(x, y) \in A_1 \cap B_1$ آنگاه ابابا $= y =$ احمدی نژاد !!)

در این صورت $\alpha + \beta = \operatorname{Card}(A \cup B)$.

مثال) $2 + 2 = \operatorname{Card}\{1,2\} + \operatorname{Card}\{3,4\} = \operatorname{Card}\underbrace{\{1,2,3,4\}}_{\mathbb{N}_4} = 4$

مثال ۲) $\aleph_0 + \aleph_0 = \operatorname{Card} \mathbb{N}_e + \operatorname{Card} \mathbb{N}_o = \operatorname{Card}(\underbrace{\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o}_{\mathbb{N}}) = \aleph_0$

تعریف. اگر α ، β دو عدد اصلی باشند آنگاه $\alpha \cdot \beta = \operatorname{Card}(A \times B)$

مثال) $2 \times 2 = \operatorname{Card} \mathbb{N}_2 \cdot \operatorname{Card} \mathbb{N}_2 = \operatorname{Card}(\underbrace{\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_2}) = \operatorname{Card} \mathbb{N}_4 = 4$

$\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} \sim \mathbb{N}_4$

$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \operatorname{Card} \mathbb{N} \cdot \operatorname{Card} \mathbb{N} = \operatorname{Card} \underset{\underset{\mathbb{N}}{\sim}}{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \operatorname{Card} \mathbb{N} = \aleph_0$

قضیه (کانتور) ۳۴) $Card\,A < Card\,P(A)$

حل: تابع $\varphi: A \to P(A)$ ، $a \mapsto \{a\}$ یک به یک است زیرا

$$\varphi(a_1)=\varphi(a_2) \Rightarrow \{a_1\}=\{a_2\} \xRightarrow{a_1\in\{a_1\}=\{a_2\}} a_1 = a_2 .$$

پس $Card\,A \le Card\,P(A)$ (خ) فرض کنیم یک تناظر یک به یک مانند $f: A \to P(A)$ وجود داشته باشد

مجموعه $S=\{a\in A \mid a\notin \underbrace{f(a)}_{\text{مجموعه } \in P(A)}\}$ را در نظر می‌گیریم. چون f پوشا است

پس عنصری مانند $e\in A$ هست که $S=f(e)$. دو حالت رخ می‌دهد:

الف) $e\notin S=f(e)$. پس بنا به تعریف S، $e\in S$ که ممکن نیست.

ب) $e\in S=f(e)$. " " " " $e\notin S$ " " " " .

به یاد دار کار را دو بار لحاظ

پس در هر حال به تناقض رسیدیم. بنابراین فرض باطل است و تناظر یک به یک بین

A ، $P(A)$ وجود ندارد، لذا $Card\,A < Card\,P(A)$. □

(مثال

$$0+\alpha = \text{Card}\,\emptyset + \text{Card}\,A = \text{Card}(\emptyset \,\dot\cup\, A) = \text{Card}\,A = \alpha$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$\begin{cases} x\in A \Rightarrow x\in A \vee x\in\emptyset \Rightarrow x\in A\cup\emptyset \\ x\in A\cup\emptyset \Rightarrow x\in A \vee x\in\emptyset \underset{x\notin\emptyset}{\Longrightarrow} x\in A \end{cases}$$

(مثال ۲

$$\alpha\cdot\beta = \text{Card}\,A\cdot\text{Card}\,B = \text{Card}\,A\times B = \text{Card}\,B\times A = \text{Card}\,B\cdot\text{Card}\,A = \beta\cdot\alpha$$

$$\varphi : A\times B \sim B\times A$$
$$(a,b)\mapsto(b,a)$$

تمرین) ثابت کنید $\aleph_0 + c = c$

حل.

$$\aleph_0 + c = \text{Card}\,\mathbb{N} + \text{Card}(0,1) = \text{Card}(\mathbb{N}\,\dot\cup\,(0,1)) \leq \text{Card}\,\mathbb{R} = c$$

$$\mathbb{N}\,\dot\cup\,(0,1) \sim \mathbb{N}\cup(0,1) \subseteq \mathbb{R}$$

$$c = \text{Card}(0,1) \leq \text{Card}(\mathbb{N}\,\dot\cup\,(0,1)) = \text{Card}\,\mathbb{N} + \text{Card}(0,1) = \aleph_0 + c$$

$$(0,1) \subseteq \mathbb{N}\cup(0,1)$$

نتیجه قضیه شرودر برنشتاین ، $\aleph_0 + c = c$ □

تمرین. ثابت کنید بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا و یک عدد اصم وجود دارد.

تعریف. فرض کنید A, B دو مجموعه باشند. A^B مجموعه‌ی تمام توابع از B به A است.

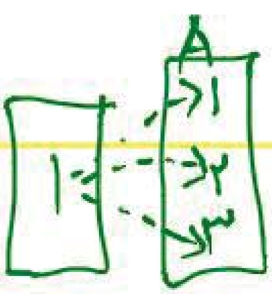
مثال) $\{0,1\}^{\{*, \text{ابا ما}\}}$ عبارت است از مجموعه‌ی تمام توابع از $\{*, \text{ابا ما}\}$ به $\{0,1\}$:

تعریف. اگر α, β دو عدد اصلی باشند، $\text{Card}A=\alpha$, $\text{Card}B=\beta$ آنگاه

$$\alpha^\beta := \text{Card}(A^B)$$

مثال) $\alpha^1=\alpha$ زیرا

$$\alpha^1 = \text{Card}A^{\text{Card}\{1\}} = \text{Card}(A^{\{1\}}) = \text{Card}\underbrace{\{f:\{1\}\to A \mid \ldots\}}_{\sim} = \underbrace{\text{Card}A}_{\sim} = \alpha$$



$$\varphi: A \to A^{\{1\}}$$
$$a \mapsto f_a, \quad f_a = \{(1,a)\}$$

در واقع تابع

$$\varphi(a)=\varphi(b) \Rightarrow f_a=f_b \Rightarrow f_a(1)=f_b(1) \Rightarrow a=b$$

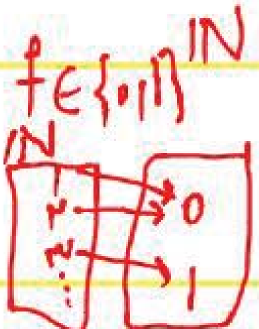
$$\boxed{f=g \Leftrightarrow \forall x;\ f(x)=g(x)}$$

اکنون فرض کنیم $g\in A^{\{1\}}$. پس  فرض کنید $a_0=g(1)$ ، داریم

$g=f_{a_0}=\varphi(a_0)$. پس φ پوشاست.

تمرین. ثابت کنید $\alpha^0=1$, $1^\alpha=1$

قضیه ۴۴. $Card(\{0,1\}^{\mathbb{N}})=2^{\aleph_0}=\underset{\overset{\|}{Card(0,1)}}{c}$



پس f یک دنباله است.

$x_1,x_2,\dots$

برهان. ۱. تابع $\varphi:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\longrightarrow(0,1)$

$\varphi(f)\longmapsto 0/f(1)f(2)f(3)\cdots$

یک به یک است زیرا

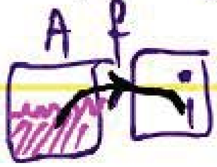
$\varphi(f)=\varphi(g)\Rightarrow 0/f(1)f(2)\dots=0/g(1)g(2)\dots$

$\Rightarrow\forall n;\ f(n)=g(n)\Rightarrow f=g$

پس $2^{\aleph_0}\ \underline{Card\{0,1\}^{\mathbb{N}}}<\underbrace{Card\,(0,1)}_{c}$ و بالعکس به عنوان تمرین و لذا حکم . □

لم: A مجموعه توانی $P(A)$ نشان دهید $Card\,P(A) = 2^{Card A}$ $= Card(\{0,1\}^A)$

فرض: تابع $\varphi: \{0,1\}^A \longrightarrow P(A)$, $f \longmapsto f^{-1}(\{1\})$ یک به یک است زیرا



(توجه کنید که هر $x \in f^{-1}(\{1\})$ به ۱ نظیر می‌شود و هر $x \in (f^{-1}\{1\})' = f^{-1}(\{0\})$ به ۰ نظیر می‌شود) متمم

فرض کنیم $\varphi(f) = \varphi(g)$ پس $f^{-1}(\{1\}) = g^{-1}(\{1\})$ لذا $f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{1\})' = g^{-1}\{1\}' = g^{-1}(\{0\})$

$$\forall x; \quad f(x) = \begin{cases} 1 \Rightarrow x \in f^{-1}(\{1\}) = g^{-1}(\{1\}) \Rightarrow 1 = g(x) \\ 0 \Rightarrow x \in f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\}) \Rightarrow 0 = g(x) \end{cases}$$

پس $f = g$. لذا $2^{Card A} = Card(\{0,1\}^A) \leq Card\,P(A)$

تابع $\left\{ \psi: P(A) \to \{0,1\}^A, \; E \longmapsto \chi_E \right.$ نشان دهید $\chi_E: A \to \{0,1\}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

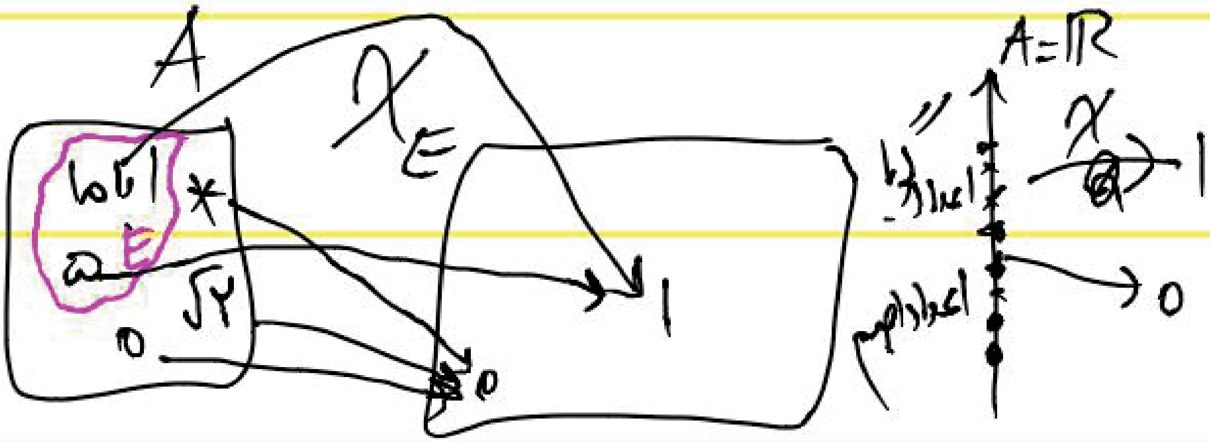
تابع مشخصه E

یک به یک است زیرا

$\psi(E)=\psi(F) \Rightarrow \chi_E = \chi_F \Rightarrow \chi_E^{-1}(\{1\}) = \chi_F^{-1}(\{1\}) \Rightarrow E=F$

$\square$. $\operatorname{Card}P(A) = 2^{\operatorname{Card} A}$ پس $\operatorname{Card}P(A) \le \operatorname{Card}[0,1] = 2^{\aleph_0}$. F بنابراین تابع E شرط را برقرار نمی‌کند E، A . $\operatorname{Card} A$

مثال (



تمرین . $\chi_{E'} = 1 - \chi_E$

حل . $\forall x \in A;\ \chi_{E'}(x) = \begin{cases} 1 = 1-0 = 1-\chi_E(x) & x \in E'\ (x \notin E) \\ 0 = 1-1 = 1-\chi_E(x) & x \notin E'\ (x \in E) \end{cases}$

تمرین . $\chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$

$\forall x \in A;\ \chi_{E\cap F}(x) = \begin{cases} 1 = 1\cdot 1 = \chi_E(x)\cdot\chi_F(x) & x \in E\cap F\ (x\in E \ \&\ x \in F) \\ 0 \begin{cases} = 1\cdot 0 \\ = 0\cdot 1 \\ = 0 \cdot 0 \end{cases} = \chi_E(x)\cdot\chi_F(x) & x \notin E\cap F \begin{pmatrix} x\in E \ \&\ x\notin F \\ x\notin E \ \&\ x \in F \\ x \notin E \ \&\ x \notin F \end{pmatrix} \end{cases}$

تمرین: $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F$

لم: اگر C که $2^{\aleph_0} \leq C$. این نشان می‌دهد که $C \leq 2^{\aleph_0} \Rightarrow$ $\mathrm{Card}\,\mathbb{R} = C = 2^{\aleph_0}$

$2^{\mathrm{Card}\,\mathbb{Q}} = \mathrm{Card}\,P(\mathbb{Q})$

تابع
$$\begin{cases} \theta : \mathbb{R} \to P(\mathbb{Q}) \\ r \mapsto \{q \in \mathbb{Q} \mid q > r\} \end{cases}$$
یک به یک است زیرا:

اعداد گویا

ب.ا.خ.ب.ک.م.و.آ

$$r_1 \neq r_2 \Rightarrow r_1 < r_2 \Rightarrow \exists q_0 \in \mathbb{Q};\ r_1 < q_0 < r_2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\{q \in \mathbb{Q};\ q > r_1\}}_{\ni q_0} \neq \underbrace{\{q \in \mathbb{Q} \mid q > r_2\}}_{\not\ni q_0} \Rightarrow \theta(r_1) \neq \theta(r_2)$$

پس $\mathrm{Card}\,P(\mathbb{Q}) \geq \mathrm{Card}\,\mathbb{R} = C$. $\square$

بنا به لم بالا

$2^{\mathrm{Card}\,\mathbb{Q}} = 2^{\aleph_0}$ زیرا $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

$\aleph_0 = \mathrm{Card}\,\mathbb{N} \leq \mathrm{Card}\,A$

$0, 1, 2, \ldots$ نامتناهی $\aleph_0, C, 2^{C}, 2^{2^{C}}, \ldots$ ($2^{\aleph_0} = C$, $2^C = d$)

فهرست اعداد اصلی بصورت صعودی است از

$\mathbb{N} \sim A_0 \subseteq A$

اصل پیوستار: بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ هیچ عدد اصلی دیگری وجود ندارد. (به اصل انتخاب نیاز است)

$\aleph_0$ کوچکترین عدد اصلی ترامتناهی است زیرا هر مجموعه نامتناهی شامل یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی است.