فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی

شماره - - (بهار - - - -) صص. - - تا - -

نگاهی به فضاهای احتمال ناجابجایی

قدیر صادقی، علی طالبی، و محمد صال مصلحیان

چکیده. نظریه احتمال ناجابجایی تعمیمی از نظریه احتمال کلاسیک است که در آن متغیرهای تصادفی به عنوان توابع اندازه‌پذیر مدل‌بندی نمی‌شوند؛ بلکه به عنوان عملگرهای روی یک فضای هیلبرت در نظر گرفته می‌شوند. در این مقاله، با ارائه چندین مثال به بررسی سیر تاریخی پیدایش نظریه احتمال و تحول آن از صورت کلاسیک به نظریه اندازه و سپس صورت ناجابجایی می پردازیم.

۱. سرآغاز

نظریه احتمال به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات به مطالعه پدیده‌های تصادفی می پردازد. آغاز علم احتمال در سده هفدهم میلادی و با کارهای ریاضیدانان فرانسوی همچون پاسکال[۱] و فرما[۲] و ریاضیدان هلندی هوینگس[۳] شروع شد. در اواخر سده هجدهم و ابتدای سده نوزدهم نظریه احتمال در دانش‌های طبیعی و صنعت به طور جدی کاربرد پیدا کرد. در این دوره نخستین قضیه‌های نظریه احتمال یعنی قضایای لاپلاس[۴]، پواسون[۵]، لژاندر[۶] و گاوس[۷] ثابت شد. در نیمه دوم سده نوزدهم

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46L53 ; 47A30.

عبارات و کلمات کلیدی. نظریه احتمال، نظریه اندازه، متغیر تصادفی، فضای هیلبرت، نظریه احتمال ناجابجایی.

۱ Pascal
۲ Fermat
۳ Huygens
۴ Laplace
۵ Poisson
۶ Legendre
۷ Gauss

میلادی ریاضیدانان روسی تأثیر شگرفی در پیشرفت نظریه احتمال داشتند، چبیشف[۱] و شاگردانش، لیاپونوف[۲] و مارکوف[۳] یک رشته از مسئله‌های کلی نظریه احتمال را حل کردند. در آغاز قرن بیستم دانشمندان زیادی از جمله بورل[۴] و برنشتاین[۵] روی نظریه احتمال کار کردند اما درخشان‌ترین نام در این عرصه کولموگروف[۶]، ریاضیدان روسی، است که اصول موضوع احتمال را در کتابی به نام مبانی نظریه احتمال در سال ۱۹۳۳ منتشر کرد. نظریه احتمال کلاسیک در اثر وی به عنوان شاخه‌ای از نظریه اندازه مطرح شد. یک رویداد قابل توجه در این پیشرفت، سخنرانی معروف هیلبرت[۷] در پاریس در مورد مسائل حل نشده در ریاضیات بود که در آن وی خواستار یک بررسی نظام‌مند در مورد نظریه احتمال شد. به اعتقاد هیلبرت فهم کامل نظریه‌های خاص یک علم برای بحث موفقیت‌آمیز مبانی آن ضروری است. هیلبرت همچنین عقیده داشت که علم فیزیک باید صورت‌بندی شود و او خود نقش عمده‌ای در این خصوص ایفا نمود. او در زمستان سال‌های ۱۹۲۶ و ۱۹۲۷، یک سلسله سخنرانی در مورد مکانیک کوانتومی ارائه داد که با همکاری فون نویمان[۸] تهیه شده بود. این رویکرد با صورت‌بندی مکانیک کوانتومی توسط فون‌نویمان در فضای هیلبرت به اوج خود رسید. مطالب موجود در فیزیک کوانتوم مانند اصل عدم قطعیت هایزنبرگ با توجه به نتایج تمامی آزمایش‌ها کاملاً تصادفی بوده و پیش‌بینی دقیق غیرممکن است. یعنی عدم توانایی ما در پیش‌بینی به خاطر کم بودن دانش نیست بلکه خود پدیده کاملاً تصادفی است؛ [۶]. نامساوی بل و قضیه کوچن[۹]–اسپکر[۱۰] از دسته قضایای مهمی هستند که نشان می‌دهند نمی‌توان مکانیک کوانتوم را با استفاده از نظریه احتمال کلاسیک مدل‌بندی کرد؛ زیرا مقادیر کمیت‌های یک مشاهده‌پذیر (خاصیت دینامیکی مورد مطالعه مانند مکان، سرعت و تکانه از یک سیستم کوانتومی) قابل دستیابی نیست مگر اینکه مشخص کنیم کدام اندازه‌گیری را قصد داریم انجام دهیم و کدام مقادیر را مایلیم تعیین کنیم. به این معنا، فیزیک کوانتوم نیاز به توضیح بیشتری از شانس دارد. با گذشت زمان نظریه احتمالی موسوم به نظریه احتمال ناجابجایی به وجود آمد که هر دو نظریه احتمال کلاسیک و نظریه کوانتوم را به عنوان

---

[۱] Chebyshev
[۲] Lyapunov
[۳] Markov
[۴] Borel
[۵] Bernstein
[۶] Kolmogorov
[۷] Hilbert
[۸] von Neumann
[۹] Kochen
[۱۰] Specker

حالات خاص در بر می‌گرفت. با توجه به ریشه‌های این موضوع نظریه احتمال ناجابجایی را نظریه احتمال کوانتومی نیز می‌خوانند. مقدمه‌ای از ایده‌های پایه مدل احتمالی در مکانیک کوانتوم برای ریاضیدانان در [۸] قابل دسترسی است.

نظریه احتمال ناجابجایی تعمیمی از نظریه احتمال کلاسیک است که در آن متغیرهای تصادفی به عنوان توابع اندازه‌پذیر مدل‌بندی نمی‌شوند؛ بلکه به عنوان عملگرهای روی یک فضای هیلبرت در نظر گرفته می‌شوند. این تئوری که به عنوان یک نظریه اندازه ناجابجایی توسط فون نویمان در اوایل دهه‌ی ۳۰ مطرح شد، به تدریج گسترش یافت. در عصر معاصر ریاضیدانانی همچون وینر[۱]، دوب[۲]، خین چین[۳]، بورخولدر[۴]، ایتو[۵]، و تائو[۶] به توسعه نظریه احتمال همت گماشتند؛ ر.ک. [۱، ۳، ۱۰، ۱۹].

۲. فضاهای احتمال کلاسیک

آغاز رسمی احتمال که یکی از ابزارهای اساسی علم آمار است، به قرن هفدهم در مطالعه قمار یعنی بازی‌هایی که در آن شانس، دخالت بسزایی داشته است برمی‌گردد. این بازی‌ها کارهایی از قبیل چرخاندن چرخ، ریختن یک تاس، پرتاب یک سکه، کشیدن یک کارت بازی از بین چند کارت و ... را در بر می‌گیرد که در آن‌ها برآمد یا نتیجه آزمایش قطعی و مشخص نیست. بدین ترتیب موضوع اصلی نظریه احتمال بررسی پدیده‌هایی تجربی است که نظم قطعی نداشته و مشاهدات آن‌ها نتیجه مشابهی ندارد ولی در عین حال دارای نظمی هستند که توسط ثبت فراوانی‌هایشان تعیین می‌گردد و در نتیجه با وجود قطعی نبودن برآمد، یک برآمد قابل پیش‌بینی در درازمدت وجود دارد. برای مثال در پرتاب یک سکه سالم (متقارن و متعادل موسوم به نااریب) به دفعات زیاد، حدود نیمی از نتیجه آزمایش‌ها رو خواهد بود. در پرتاب چنین سکه‌ای تنها دو حالت رو یا پشت رخ می‌دهد. پس انتظار داریم که احتمال ظاهر شدن رو یا پشت به یک اندازه باشد و در نتیجه به پیشامد ظاهر شدن رو احتمال $\frac{1}{2}$ را نسبت می‌دهیم. این نوع استدلال سبب می‌شود احتمال کلاسیک پیشین را برای آزمایش تصادفی دارای n برآمد ممکن دو به دو ناسازگار (مجزا) و هم‌شانس به صورت زیر تعریف کنیم: اگر به تعداد $n(A)$ برآمد حاوی ویژگی A باشند، احتمال رخداد A برابر است با $\frac{n(A)}{n}$.

[۱] Wiener
[۲] Doob
[۳] Khintchine
[۴] Burkholder
[۵] Itô
[۶] Tao

با کمی دقت در تعریف احتمال پیشین درمی‌یابیم که این تعریف مستلزم اندکی همان‌گویی است و این پرسش پیش می‌آید که واقعا معنای هم‌شانس بودن حالات چیست و یا چگونه می‌توان قضاوت کرد که دو حالت هم‌شانس هستند یا نه؟ اجازه دهید مثال مشهور منسوب به دالامبر[۱] ریاضیدان مشهور فرانسه را یادآور شویم. در پرتاب دو سکه، دالامبر استدلال نمود که سه حالت ممکن عبارتند از (الف) دو رو (ب) دو پشت و (پ) یک رو و یک پشت. بنابراین وی نتیجه گرفت که احتمال "یک رو و یک پشت" برابر با $\frac{1}{3}$ است. اگر وی این تصور را می‌کرد که احتمال با فراوانی تجربی وقوع پیشامد ارتباط دارد، شاید بعد از این که دو سکه را بیش از چند بار پرتاب می‌کرد، نظر خود را عوض می‌نمود. حتی گفته شده است که برای قرن‌ها مردم بر این اعتقاد بودند که تعداد دندان‌های یک مرد بیش از تعداد دندان‌های یک زن است؛ به دلیل آن که ارسطو چنین گفته بود و ظاهرا هیچکس به خود زحمت این را نداده بود که به دهان چند نفر نگاهی بیفکند!؛ ر.ک. [۲].

بنابراین در رهیافت کلاسیک پیشین شاهد برخی محدودیت‌های دست و پا گیر هستیم. برای مثال در حالتی که تعداد برآمدهای ممکن نامتناهی باشد و یا در پرتاب سکه‌ای که به نفع رو اریب است، تعریف کلاسیک پیشین نمی‌تواند ما را یاری کند. بدین منظور مجبوریم تعریف کلاسیک پیشین را اصلاح کنیم و یا آن را گسترش دهیم و احتمالی با حوزه کاربردی وسیعتری به نام احتمال کلاسیک پسین معرفی کنیم. نکته مهم در این نوع مفهوم از احتمال این است که بتوانیم دنباله‌ای از مشاهدات یا آزمایش‌ها را تحت شرایط یکسان تصور کنیم. آنگاه می‌توانیم احتمال وقوع پیشامد A را p گرفته و به وسیله فراوانی نسبی پیشامد A در دنباله‌ای از آزمایش‌ها، مقدار تقریبی p را بدست آوریم. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم پیش‌بینی کنیم که نوزادی که در مکان معینی به دنیا می‌آید پسر است یا دختر. این پیشامد به طور انفرادی، نامعین است. اما می‌توان آن را به طور اطمینان‌بخشی با نتایج گروهی از تولدها مرتبط ساخت. برای مثال اگر بر اساس موارد ثبت شده تولدها، مثلا ۵۱ درصد از نوزادان پسر باشند. منطقی است که وجود عدد p را به عنوان احتمال این که مثلا فرزند متولد شده پسر باشد، بپذیریم و آن را با ۰/۵۱ تقریب بزنیم؛ [۵].

ممکن است بخواهیم به پرسش‌هایی از قبیل احتمال این که همسرم مرا دوست داشته باشد یا احتمال این که جنگ جهانی سوم قبل از تاریخ معینی شروع شود، پاسخ دهیم. این نوع پرسش‌ها مسایلی مهم در نظریه احتمال عمومی هستند که در آن‌چه به آن احتمال ذهنی اطلاق می‌شوند، گنجانده می‌شوند.

---
[۱] Delambre

در ادامه نظریه احتمال نوین را معرفی می‌کنیم. باید خاطر نشان کنیم که این نظریه احتمال به اندازه کافی غنی است که هر سه قسم احتمال پیشین، احتمال پسین و احتمال ذهنی را در بر می‌گیرد. خواننده علاقه‌مند برای مطالعه بیشتر می‌تواند به [۵] مراجعه کند.

قبل از این که نظریه احتمال نوین را بر اساس اصول‌بندی کولموگروف معرفی کنیم، به منظور درک بهتر تعاریف و مفاهیم ابتدا با نظریه مقدماتی احتمال شروع می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم که هر برآمد ممکن آزمایش تحت مطالعه، قابل شمارش باشد؛ مانند آزمایش پرتاب سکه یا تاس.

تعریف ۱.۲ (فضای نمونه‌ای). هر برآمد ممکنِ یک آزمایش را نقطه نمونه و مجموعه تمام برآمدهای ممکن (یا نقاط نمونه) را فضای نمونه می‌نامیم. به عبارت دیگر، در یک پدیده تصادفی مجموعه همه حالات ممکن در به وقوع پیوستن آزمایش فضای نمونه نامیده می‌شود.

یک پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است. رده تمام پیشامدهای ممکن برای یک آزمایش تصادفی را فضای پیشامد می‌گوییم. احتمال را تنها به پیشامد نسبت می‌دهیم. همواره می‌توان رده تمام پیشامدها را به اندازه‌ای بزرگ گرفت که همه زیرمجموعه‌ها یا پیشامدهایی را که می‌خواهیم درباره احتمال آن‌ها صحبت کنیم، در بر بگیرد. برای فضاهای نمونه بزرگ، چنین نیست که هر زیرمجموعه‌ای یک پیشامد باشد. اگر اعضای فضای نمونه شمارش‌پذیر و متناهی باشند، معمول است که فضای پیشامد متناظر با آن، رده همه زیرمجموعه‌های فضای نمونه در نظر گرفته شود. [۵] را ببینید.

مثال ۲.۲. آزمایش را پرتاب یک تاس در نظر بگیرید. فضای نمونه یا همان مجموعه برآمدهای ممکن این آزمایش به صورت $\Omega = \{۱, ۲, \dots, ۶\}$ است. در این مثال فضای پیشامد عبارت از تمام زیرمجموعه‌های Ω می باشد که تعدادشان برابر با $۶۴ = ۲^۶$ است.

مثال زیر نشان می‌دهد که یک زیرمجموعه دلخواه از فضای نمونه لزوما یک پیشامد نیست.

مثال ۳.۲. [۲] یک لامپ روشنایی را در نظر گرفته و نقطه نمونه را زمانی در نظر بگیرید که طول می‌کشد تا آن لامپ بسوزد. از آنجا که هر عدد نامنفی، برآمدی ممکن برای این آزمایش است، بنابراین $\Omega = \{x : x \geq ۰\}$. در این فضای نمونه، همه زیرمجموعه‌های Ω پیشامد نیستند؛ بلکه هر زیرمجموعه‌ای که بتوان به صورت اجتماع یا اشتراک مجموعه‌هایی به شکل $\{x : k \leq x < m\}$

نمایش داد، یک پیشامد می‌باشد. مجموعه $\{x : k \leq x < m\}$ پیشامدی است که لامپ به مدت حداقل k ساعت روشن بماند و قبل از m ساعت بسوزد.

با توجه به مثال فوق می‌بینیم که تعریف پیشامد و فضای پیشامد کاملا رضایت‌بخش نیستند. این‌طور نیست که همه زیرمجموعه‌های فضای نمونه، پیشامد باشند. اما این که کدام یک از زیرمجموعه‌ها پیشامد می‌باشند و کدام یک نمی‌باشند دقیقا بیان نشد. در اینجا به جای تعریف دقیق این که کدام زیرمجموعه‌های Ω فضای پیشامد را تشکیل می‌دهند، به ذکر تعدادی از خواص زیرمجموعه‌های فضای پیشامد می‌پردازیم که مشخصه پیشامدها هستند.

تعریف ۴.۲ (σ-جبر). به خانواده $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های فضای نمونه یا پیشامدها که در شرایط زیر صدق می‌کند، یک σ-جبر می‌گوییم:

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- اگر $A \in \mathcal{F}$، آنگاه $A^c \in \mathcal{F}$.
- اگر $\{A_n : n \in \mathcal{F}\}$ خانواده‌ای در $\mathcal{F}$باشند، آنگاه $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$.

به اعضای یک σ-جبر، پیشامد می‌گوییم.

پیش از این گفته شد که توجه ما به پیشامد، عمدتا به علت توجه به احتمال رخ دادن آن‌هاست. پس یقینا مایلیم که پیشامد حتمی، یعنی Ω را شامل شود. همچنین اگر A یک پیشامد باشد، به این معناست که بتوانیم در مورد احتمال رخ دادن آن صحبت کنیم، پس A^c نیز باید یک پیشامد باشد تا بتوانیم درباره احتمال رخ ندادن آن هم صحبت کنیم. خاصیت سوم را می‌توان اینگونه شرح داد که مثلا برای یافتن احتمال پیشامد $A = \{۱, ۲, ۳\}$ در پرتاب یک تاس می‌توان رابطه احتمال پیشامدهای $A_۱ = \{۱, ۲\}$ و $A_۲ = \{۳\}$ را با پیشامد مزبور بررسی نمود زیرا $A = A_۱ \cup A_۲$؛ ر. ک. [۵].

منطقی به نظر می‌رسد که ثبت آماری فراوانی یک پدیده، به ما انگیزه می‌دهد که یک اصل در مورد تخمین کمیِ ”تصادفی بودنِ“ پیشامد A مرتبط با نتایج آزمایشات در نظر بگیریم. با این نقطه شروع، نظریه احتمال نسبت به هر پیشامد A عدد معین $P(A)$ را نظیر می‌کند که احتمال وقوع آن پیشامد نامیده می‌شود. همچنین احتمال وقوع پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B که آن را احتمال شرطی می‌نامند به صورت$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ تعریف می‌شود به شرط آن که $P(B) > ۰$. در حالتی که $P(A|B) = P(A)$ پیشامدهای A و B را مستقل می‌گوییم.

تابع احتمال که اکنون معرفی می‌کنیم یک تابع مجموعه‌ای است (یعنی قلمروی آن مجموعه‌ای از مجموعه‌ها و برد آن نیز مجموعه‌ای از اعداد حقیقی در بازه $[0, 1]$ است).

تعریف ۵.۲ (تابع احتمال). تابع احتمال P یک تابع مجموعه‌ای با قلمروی $\mathcal{F}$ (یک σ-جبر از پیشامدها) و برد $[0, 1]$ است که در اصول زیر صدق می‌کند:

- $P(\Omega) = 1$.
- برای هر $A \in \mathcal{F}$، $P(A) \geq 0$.
- اگر $\{A_n : n \in \mathcal{F}\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای دو به دو ناسازگار[1] (یا مجزا یعنی $A_i \cap A_j = \emptyset$ برای $i \neq j$) در $\mathcal{F}$ باشد، آنگاه $P(\cup_n A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

اکنون در موقعیتی هستیم که فضای احتمال را به مفهوم کولموگروف تعریف کنیم.

تعریف ۶.۲ (فضای احتمال). فضای احتمال عبارت از سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ می‌باشد که در آن Ω فضای نمونه، $\mathcal{F}$ یک σ-جبر از پیشامدها و P یک تابع احتمال با قلمروی $\mathcal{F}$ است.

کاربرد عمده فضای احتمال در این است که روشی ساده برای بیان فرض‌هایی که در تعاریف و قضایا پیش می‌آید، فراهم می‌کند. به علاوه، فضای احتمال تعاریف اساسی فضای نمونه، فضای پیشامد و احتمال را که تاکنون عنوان شد، به هم پیوند می‌دهد.

مثال ۷.۲ (فضای احتمال گسسته). به عنوان اولین نمونه‌های تصادفی، می‌توان به فضاهای احتمال گسسته[2] اشاره کرد. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را یک فضای احتمال گسسته می‌نامند اگر Ω یک مجموعه متناهی و یا شمارای نامتناهی و فضای پیشامد $\mathcal{F}$ برابر با 2^{Ω}، مجموعه توانی Ω باشد. به علاوه در این حالت تابع احتمال برای هر زیرمجموعه $A \subseteq \Omega$ در روابط زیر صدق می‌کند:

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$$
$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1.$$

---
[1] mutually exclusive
[2] discrete probability space

مثال ۲.۲ نمونه‌ای ساده از فضای احتمال گسسته است.
برای زیرمجموعه $A \subseteq \{۱, ۲, \ldots, ۶\}$ مطابق با تعریف کلاسیک احتمال قرار می‌دهیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{۶}.$$

در این صورت به سادگی می‌توان بررسی کرد که P در اصول سه‌گانه احتمال صدق می‌کند.

۳. ارتباط بین احتمال و نظریه اندازه

همان طور که دیدیم و می‌دانیم تعریف احتمال روی مجموعه‌های متناهی و یا شمارا به سادگی قابل توصیف از دیدگاه نظریه اندازه می باشد و در واقع از اولین نمونه‌های تاریخی محسوب می‌شوند. در ادامه با بررسی دقیقتر مثال پرتاب سکه تناظری را که بین احتمال و نظریه اندازه –لااقل اندازه لبگ– وجود دارد، تشریح می‌کنیم. بدین منظور یک سکه سالم را در نظر بگیرید. فضای نمونه در پرتاب یک سکه مجموعه {پشت ,رو} است. اگر دو پیشامد ممکن هم زمان رخ ندهند، در این صورت احتمالات آن‌ها را می توان جمع کرد. بنابراین اگر $P(A)$ نشان دهنده احتمال رخداد پیشامد A باشد، آن گاه $P(\text{ر}) + P(\text{پ}) = ۱$ و در نتیجه $P(\text{ر}) = P(\text{پ}) = \frac{۱}{۲}$. حال فرض کنید که سکه دوبار پرتاب شود. فضای نمونه در این حالت شامل چهار حالت است که احتمال رخ دادن هر کدام برابر $\frac{۱}{۴}$ می باشد. به همین ترتیب در پرتاب سکه به تعداد n بار، ۲^n n–تایی به عنوان حالات ممکن رخ می دهد که احتمال هر یک برابر با $\frac{۱}{۲^n}$ می باشد.
سپس فرض کنید n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین دنباله‌های نامتناهی از ''ر'' و ''پ'' خواهیم داشت که احتمال هر یک از این دنباله‌ها برابر صفر است. لیکن این موضوع، احتمال مجموعه‌های دیگری از پیشامدهای ممکن را، آن‌طور که در حالتی که n متناهی باشد کاملا مشخص می‌کرد، تعیین نمی‌کند. برای لحاظ کردن چنین مجموعه‌هایی ابتدا ''ر'' را با عدد ۰ و ''پ'' را با عدد ۱ جایگزین کرده و هر دنباله را با بسط دودویی آن متناظر می‌کنیم. برای مثال $۰/۰۱۰۱۰۱۰۱\ldots$ بسط دودویی $\frac{۱}{۳} = \ldots + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۴}$ است. در حالت کلی اگر ۱ یا $d_n = ۰$، آن‌گاه

$$۰/d_۱ d_۲ d_۳ \ldots = \sum_{۱ \leq n < \infty} \frac{d_n}{۲^n}.$$

هر عدد $x \in [۰, ۱]$ چنین بسطی دارد ولی لزوما منحصر به فرد نیست. به عبارت دقیقتر، اگر k عددی صحیح باشد به قسمی که $۰ < k < ۲^n$، آن‌گاه عدد گویای $\frac{k}{۲^n}$ دو بسط مختلف خواهد داشت که در یکی از آن‌ها بسط معمولی $\frac{k}{۲^n}$ را در ابتدا قرار می‌دهیم و مابقی را ۰ قرار می‌دهیم.

حالت دیگر را می‌توان با بسط معمولی $\frac{k-1}{2^n}$ همراه با تعدادی نامتناهی عدد ۱ بعد از آن تشکیل داد. توجه داریم که تنها تعدادی شمارا از این نوع اعداد گویا وجود دارد و تمام اعداد دیگر بسط منحصر به فردی دارند.

می دانیم که روی $[0, 1]$ اندازه لبگ[1] یا یکنواخت تعریف می شود که به هر زیربازه طول آن را نسبت می‌دهد و اندازه اعداد گویا برابر صفر است.

پیشامد این که n پرتاب اول مشخص و داده شده باشد با مجموعه همه دنباله‌های نامتناهی که با n–تایی داده شده از اعداد ۰ و ۱ شروع می‌شود، متناظر است و این نیز به نوبه خود در تناظر با یک زیربازه از $[0, 1]$ به طول $\frac{1}{2^n}$ می باشد. هر مجموعه با m دنباله مختلف از n پرتاب اول با یک زیرمجموعه ای از $[0, 1]$ با طول $\frac{m}{2^n}$ متناظر است. این موضوع حداقل اندازه لبگ را با احتمالات به نوعی متناظر می‌کند و نمونه‌ای از ارتباط کلی بین نظریه اندازه و احتمال محسوب می شود؛ ر. ک. [۷]. ما در بخش بعدی فضای احتمال را در قاب نظریه اندازه بررسی خواهیم کرد.

۱.۳. احتمال در چارچوب نظریه اندازه. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه پذیر و اندازه مثبت P روی $\mathcal{F}$ به طوری که $P(\Omega) = 1$، در این صورت فضای اندازه $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را یک فضای احتمال می‌نامیم.

مجموعه‌های اندازه‌پذیر در یک فضای احتمال را پیشامد می‌نامیم و $P(A)$ بیانگر احتمال رخ دادن پیشامد A است.

۱.۱.۳ . *متغیرهای تصادفی.* قبل از چبیشف، علاقه اصلی در حوزه احتمال عمدتا در محاسبه احتمالات پیشامدهای تصادفی بود. با این وجود، او اولین کسی بود که از قدرت کامل مفاهیم متغیرهای تصادفی[2] و امیدهای ریاضی آن‌ها بهره گرفت. مفهوم متغیر تصادفی یکی دیگر از مفاهیم اساسی در نظریه احتمال است که برای کاربردهای فیزیکی کارساز بوده و برای نمایش مقادیر فیزیکی قابل مشاهده در برنامه‌های کاربردی مجرد مورد استفاده قرار می‌گیرد. معمولا وقتی که آزمایشی انجام می‌گیرد، جالبتر است که به جای مطالعه نتایج آزمایش به مطالعه تابعی از نتایج بپردازیم. نقاط فضای نمونه می‌توانند چیزهای کاملا ملموسی نظیر مولکول و یا فرد انسان باشند. در نتیجه، این پارامترها دارای خواص متعددی هستند که برخی از آنها ممکن است اندازه‌پذیر باشد. مولکول دارای جرم و سرعت است که از روی آن‌ها می‌توانیم اندازه حرکت و انرژی جنبشی آن را با

[1] Lebesgue
[2] random variable

استفاده از فرمول‌های فیزیک محاسبه کنیم. برای یک شخص، مشخصه‌های فیزیولوژیکی نظیر سن، قد، وزن و داده‌های عددی متعدد دیگری از قبیل بهره هوشی، درآمد سالانه و مالیات‌های پرداختی و غیره به او مربوط می‌شوند.

همان طور که به یاد دارید به هر تابعی مانند $X : \omega \mapsto X(\omega)$ با حوزه تعریف Ω که مجموعه مقادیرِ عددیِ شمارایی را اختیار کند، یک متغیر تصادفی گسسته می‌گوییم. بنابراین هر تابعی روی یک فضای نمونه شمارا متغیر تصادفی گسسته خواهد بود. اما حتی در یک سطح مقدماتی پرسش‌های مهم بسیاری وجود دارند که در آن‌ها باید متغیرهایی را در نظر بگیریم که از چنین محدودیتی پیروی نمی‌کنند. به این معنا که فضاهای نمونه زیادی وجود دارند که شمارا نباشند. در چنین صورتی سوال‌های فنی ''اندازه‌پذیری'' پیش می‌آیند که بدون توسل به ریاضیات پیشرفته‌تر نمی‌توان به طور رضایت‌بخشی به بررسی آن‌ها پرداخت. این مشکل از عدم تخصیص احتمال به هر زیرمجموعه فضای نمونه در صورت ناشمارا بودن ناشی می‌شود. این معضل را می‌توان با محدود کردن خود به مجموعه‌هایی موسوم به مجموعه‌های بورل برطرف کرد. به [۲] مراجعه کنید.

منظور از یک متغیر تصادفی، تابع اندازه‌پذیر X از Ω به فضای بورل $\mathbb{R}$ است؛ به زبان ساده‌تر برای هر عدد حقیقی t مجموعه $\{\omega : X(\omega) \leq t\}$ پیشامدی (یا مجموعه اندازه پذیری) در $\mathcal{F}$ باشد. در حقیقت در قضایای نظریه اندازه ثابت می‌شود که این تعریف برای اندازه‌پذیری یک تابع کافی است و به محض اینکه چنین شرطی برقرار باشد، می‌توانیم به بحث در مورد احتمال‌های انواع کاملی از پیشامدهایی نظیر $\{t \leq X < s\}$، $\{X = t\}$، $\{X \in \mathbb{Q}\}$ و یا پیشامد $\{e^X > X^۲ + ۱\}$ بپردازیم که در آن به منظور مختصرنویسی برای متغیر تصادفی X و مجموعه اندازه‌پذیر بورل B به جای پیشامد $\{\omega : X(\omega) \in B\}$ می‌نویسیم $\{X \in B\}$.

امید[۱] (یا میانگین[۲]) یک متغیر تصادفی X را به صورت $\int_\Omega XdP$ تعریف کرده و با نماد $\mathbb{E}X$ نشان می‌دهیم. دقت کنید که در مورد فضاهای احتمال گسسته که فضای نمونه شماراست، هر تابع روی Ω به دلیل مجهز بودن به σ–جبر گسسته اندازه‌پذیر است. برای متغیر تصادفی گسسته X نمایش انتگرالی امید به شکل

$$\mathbb{E}X = \sum x_j P(X = x_j)$$

[۱] expectation
[۲] mean

تبدیل می‌شود که در آن x_jها مقادیر برد X هستند. همچنین متناظر با احتمال شرطی می توان امید شرطی[1] [۹] متغیر تصادفی X روی یک σ-زیرجبر $\mathcal{G}$ را به عنوان یک متغیر تصادفی $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ تعریف کرد که نسبت به P انتگرال‌پذیر و نسبت به $\mathcal{G}$ اندازه‌پذیر است و برای هر $G \in \mathcal{G}$ داریم $\int_G \mathbb{E}(X|\mathcal{G})dP = \int_G XdP$. در حالت خاص که X تابع مشخصه روی مجموعه اندازه‌پذیر A باشد، در این صورت احتمال شرطی به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\int_G \mathbb{E}(A|\mathcal{G})dP = P(A \cap G)$$

اهمیت این تعریف این است که تعمیم احتمال شرطی برای حالت $P(G) = ۰$ است.

تعریف ۱.۳ (تابع توزیع تجمعی). برای یک متغیر تصادفی X تابع توزیع تجمعی[2] F_X به صورت

$$F_X(t) = P(X \leq t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

تعریف می‌شود.

با استفاده از تابع توزیع تجمعی F_X می‌توان به احتمال بعضی پیشامدها در مورد X پاسخ داد. برای مثال، برای $t < s$ داریم:

$$P(t < X \leq s) = F_X(s) - F_X(t).$$

در حقیقت تابع توزیع تجمعی تابعی است که طریقه توزیع مقادیر متغیر تصادفی را به صورت تجمعی بیان می‌کند. در مثال زیر سه بار پرتاب یک سکه را به عنوان مثالی خاص از مفهوم فضای احتمال در نظریه اندازه بررسی می کنیم.

مثال ۲.۳. Ω را مجموعه ۸-عضوی همه حالات ممکن در سه بار پرتاب یک سکه را در نظر بگیرید. قرار دهید $\Omega = \{\omega_۱, \omega_۲, \dots, \omega_۸\}$ و $\mathcal{F} = ۲^\Omega$. برای هر پیشامد $A \in \mathcal{F}$ تعریف می‌کنیم $P(A) := \sum_{k=۱}^{۸} \frac{۱}{۸}\chi_A(\omega_k)$. در این صورت به راحتی می‌توان تحقیق کرد که P یک اندازه احتمال است. فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد ظاهر شدن رو (H) در سه مرتبه پرتاب سکه

[1] conditional expectation
[2] comulative distribution function

باشد. در این صورت X یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ را با احتمال‌های زیر اختیار می‌کند:

$$P(X=۰)=P(\{TTT\})=\frac{۱}{۸}$$
$$P(X=۱)=P(\{HTT,THT,TTH\})=\frac{۳}{۸}$$
$$P(X=۲)=P(\{HHT,THH,HTH\})=\frac{۳}{۸}$$
$$P(X=۳)=P(\{HHH\})=\frac{۱}{۸}$$

که در آن T نمایش ظاهر شدن پشت است.

امید ریاضی یا میانگین متغیر تصادفی X برابر خواهد شد با

$$\mathbb{E}X=\sum_{k=۰}^{۳}kP(X=k)=\frac{۱۲}{۸}.$$

تابع توزیع X نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$F_X(t)=\begin{cases} ۰ & ;t<۰ \\ \frac{۱}{۸} & ;۰\leq t<۱ \\ \frac{۴}{۸} & ;۱\leq t<۲ \\ \frac{۷}{۸} & ;۲\leq t<۳ \\ ۱ & ;۳\leq t \end{cases}$$

به عنوان برخی از مهمترین ویژگی‌های تابع توزیع تجمعی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

اولا $F_X(.)$ تابعی یکنوا، غیرنزولی و از راست پیوسته است؛ یعنی $\lim_{h\to ۰^+}F_X(t+h)=F_X(t)$. ثانیا داریم:

$$F_X(-\infty)=\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=۰,$$

و

$$F_X(\infty)=\lim_{t\to\infty}F_X(t)=۱.$$

به علاوه می‌توان امید ریاضی یک متغیر تصادفی را با استفاده از تابع توزیع آن به دست آورد. در واقع اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد، آنگاه

$$\mathbb{E}X = \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(t))\, dt = \int_{0}^{\infty} P(X > t)\, dt.$$

در پایان این بخش، به فرآیندهای تصادفی برای مدلسازی تغییرات زمانی کمیت‌های تصادفی اشاره می کنیم. یک فرآیند تصادفی با خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی مانند $\{X_t\}_{0\leq t<\infty}$ نمایش داده می شود؛ همچنین برای نمایش اطلاعات از یک خانواده صعودی از σ−زیرجبرها استفاده می شود. یکی از مهمترین متغیرهای تصادفی مارتینگل‌ها هستند. یک مارتینگل نسبت به یک خانواده $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t<\infty}$ از σ−زیرجبرها عبارت است از خانواده ای مانند $\{X_t\}_{0\leq t<\infty}$ از متغیرهای تصادفی به طوری که برای هر t، $X_t \in \mathcal{F}_t$ و $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ برای هر $s \leq t$. رابطه آخر به این معنی است که مناسب‌ترین پیش‌بینی مقدار یک فرآیند تصادفی در هر زمان t از آینده، هر مقدار فرآیند در یک زمان s از گذشته است؛ ر. ک. [۴].

۴. فضاهای احتمال ناجابجایی

پیشوند ”ناجابجایی“ را می‌توان در بسیاری از حوزه‌های کلاسیک ریاضیات اضافه کرد. برای مثال می‌توان به هندسه ناجابجایی که به زیبایی توسط آلن کونز[۱] بنیان‌گذاشته شده است و یا فضاهای توپولوژیکی ناجابجایی (جبرهای C^*)، گروه‌های کوانتومی و حساب دیفرانسیل ناجابجایی اشاره کرد. اما به عنوان قدیمی‌ترین مثال می‌توان فضاهای احتمال ناجابجایی را که به کارهای فون‌نویمان و سگال[۲] برمی‌گردد، نام برد. راهبردی که در تمام این مثال‌ها برای ارائه ساختار ناجابجایی استفاده می‌شود، یکسان است.

- اطلاعات مربوط به ساختار کلاسیک را در یک جبر مناسبی از توابع گردآوری می‌کنیم. منظور ما از یک جبر ساختاری است که به طور همزمان هم یک فضای برداری است و هم یک حلقه.

[۱] Alain Connes
[۲] Segal

- خواص جبر به دست آمده را فهرست می‌کنیم. یکی از خواص این جبر جابجایی بودن آن است.

- شرط جابجایی بودن را حذف می‌کنیم و جبرمان را با یک جبر ناجابجایی تعویض می‌کنیم.

اجازه دهید این استراتژی را برای ساختار یک فضای احتمال به کار ببریم.

- **گام اول**

فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر بگیرید. به دنبال جبری مانند $\mathcal{M}$ از توابع $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ هستیم که خواص $\mathcal{F}$ و P را به دست دهد. تمام توابع اندازه‌پذیر نسبت به $\mathcal{F}$ را در نظر می‌گیریم؛ یعنی تمام توابعی مانند X به قسمی که برای هر عدد حقیقی α، مجموعه $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\}$ متعلق به $\mathcal{F}$ باشد.

به علاوه مایلیم که امید ریاضیِ هر تابع $X \in \mathcal{M}$، یعنی $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$ تعریف شده باشد. بنابراین توابع مورد نظرمان را به رده توابع اساساً کراندار محدود می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \|X\|_\infty &:= \mathbf{esssup}_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \\ &= \inf \{\alpha > ۰ : P(|X| > \alpha) = ۰\} < \infty. \end{aligned}$$

بنابراین جبر $\mathcal{M} = L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را انتخاب کرده‌ایم که دارای شرایط مورد نظر ماست. توجه داریم که ما تفاوتی بین توابعی که تقریبا همه جا برابرند، قائل نمی‌شویم. در نتیجه ساختار جبری ما دوتایی $(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ است.

حال باید بررسی کنیم که آیا واقعا تمام اطلاعات مربوط به $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را ذخیره کرده‌ایم. به وضوح سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ جبر $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را به طور یکتا مشخص می‌کند. برعکس، اگر قرار دهیم

$$\mathcal{F}' := \{X \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) : X = X^۲ = \overline{X}\}$$

که در آن $\overline{X}$ مزدوج مختلط X است، آنگاه می‌توان مجددا اندازه احتمال P را با تعریف P' به صورت زیر بدست آورد:

$$P' : \mathcal{F}' \longrightarrow [۰, ۱] : X \mapsto \mathbb{E}(X).$$

به معنای ناجابجایی، جبر $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ توسط توابع مشخصه (تصاویر[1]) تولید می‌شود.

• گام دوم

برای تشریح گام دوم که مشخصه‌سازی جبر $\mathcal{M}$ بدست آمده در گام اول می‌باشد، ابتدا لازم است که چندین مفهوم و تعریف را از آنالیز تابعی بیان کنیم.

جبر عملگرهای کراندار

در این بخش به طور خلاصه مقدماتی از نظریه جبر عملگرها را که مرتبط به موضوع ما هستند، شرح خواهیم داد.

فرض کنید $(\mathcal{H}, \langle\,.\,,.\,\rangle)$ یک فضای هیلبرت [2] روی میدان $\mathbb{C}$ تحت نرم $\|\,.\,\| = \langle\,.\,,.\,\rangle^{\frac{1}{2}}$ باشد. چنین فضاهایی تعمیم فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ با ضرب اسکالر بردارهای در صفحه است. نگاشت خطی A روی $\mathcal{H}$ را کراندار گوییم هرگاه

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1, x \in \mathcal{H}\} < \infty.$$

فضای همه نگاشت‌های خطی کراندار روی $\mathcal{H}$ را با $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم.
به ازای هر عملگر $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$، عملگر منحصر به فرد $A^* \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ وجود دارد که آن را الحاق A [3] می‌نامیم به طوری که به ازای هر $x, y \in \mathcal{H}$ داریم

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle.$$

به سادگی قابل تحقیق است که فضای $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ همراه با اعمال جمع، ضرب اسکالر و ترکیب توابع تشکیل یک جبر می‌دهد.

مثال ۱.۴. در حالتی که بعد فضای هیلبرت متناهی باشد، یعنی $\mathtt{dim}(\mathcal{H}) = n$، $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$، $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ را می‌توان با فضای $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ متشکل از ماتریس‌های $n\times n$ با درایه‌های مختلط یکی گرفت. در این حالت، برای یک ماتریس $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ با نمایش $A = (a_{ij})$ داریم $A^* = (\overline{a_{ji}})$.

فرض کنید $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. در این صورت

• A را خودالحاق [4] گوییم هرگاه $A = A^*$ یا به طور معادل برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle Ax, x\rangle$ حقیقی

[1] projection
[2] Hilbert space
[3] adjoint
[4] self-adjoint

باشد.

- A را مثبت [۱] گوییم هرگاه به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ و در این حالت می‌نویسیم $A \geq 0$.

تعریف ۲.۴ (جبر فون‌نویمان). برای $S \subseteq \mathbb{B}(\mathcal{H})$ جابجاگر S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^c = \{B \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \mid BA = AB, \text{برای هر } A \in S\}.$$

فضای $\mathcal{M}$ از نگاشت‌های خطی کراندار روی $\mathcal{H}$ را یک جبر فون‌نویمان نامیم هرگاه $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^c)^c$.

تعریف ۳.۴ (حالت). یک حالت[۲] روی جبر فون‌نویمان $\mathcal{M}$ تابعکی خطی مانند $\tau : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ است که یکانی (یعنی اگر I عملگر همانی در $\mathcal{M}$ باشد، آن‌گاه $\tau(I) = 1$) و مثبت است؛ یعنی $\tau(A^*A) \geq 0$ برای هر $A \in \mathcal{M}$.

به علاوه یک حالت τ را

- اثری[۳] گوییم هرگاه برای هر $A \in \mathcal{M}$ داشته باشیم $\tau(A^*A) = \tau(AA^*)$.
- صادق[۴] گوییم هرگاه $\tau(A^*A) = 0$ نتیجه دهد $A = 0$.
- نرمال[۵] نامیم اگر برای هر تور صعودی و از بالا کراندار $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ از عملگرهای خودالحاق در $\mathcal{M}$ داشته باشیم

$$\tau\left(\lim_\alpha A_\alpha\right) = \lim_\alpha \tau(A_\alpha).$$

برای مطالعه بیشتر در مورد تابعک اثر می‌توانید به [۲۰] مراجعه کنید.

اکنون فضای هیلبرت $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر بگیرید. برای هر تابع $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ نگاشت M_X را روی $\mathcal{H}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، متناظر می‌کنیم:

$$M_X Y(\omega) = X(\omega)Y(\omega).$$

---

[۱] positive
[۲] state
[۳] tracial
[۴] faitful
[۵] normal

گزاره ۴.۴. *فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد. در این صورت جبر*

$$\mathcal{M} = \{M_X : X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$$

یک جبر فون‌نویمان جابجایی روی $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است و نگاشت $\tau : M_X \longmapsto \int X\, dP$ یک حالت نرمال و صادق است.

قضیه زیر که موسوم به قضیه گلفند[1] برای جبرهای فون‌نویمان جابجایی است، نشان می‌دهد که عکس گزاره فوق نیز برقرار است.

قضیه ۵.۴ (گلفند). [۱۲] *فرض کنید $\mathcal{M}$ یک جبر فون‌نویمان جابجایی و τ یک حالت نرمال و صادق روی آن باشد. در این صورت فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و یک $*$-یکریختی $x \longmapsto f_x$ از $\mathcal{M}$ به $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ موجود است به قسمی‌که:*

$$\|f_x\| = \|x\|,$$
$$\mathbb{E}(f_x) := \int_\Omega f_x dP = \tau(x).$$

در نتیجه $\mathcal{M}$ و $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ می‌توانند یکسان تلقی شوند و τ متناظر با امید ریاضی نسبت به P است.

متناظر با یک متغیر تصادفی $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ می‌توان تابع مشخصه مجموعه $\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \leq t\}$ را در نظر گرفت و در این حالت امید این تابع مشخصه، تابع توزیع خوانده می‌شود.

- **گام سوم**

اکنون شرط جابجایی بودن جبر را حذف کرده و به تعریف زیر دست پیدا می‌کنیم.

تعریف ۶.۴ (فضای احتمال ناجابجایی). اگر $\mathcal{M}$ یک جبر فون‌نویمان روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، و τ یک حالت نرمال اثری و صادق روی آن باشد، دوتایی $(\mathcal{M}, \tau)$ را یک فضای احتمال ناجابجایی[2] می‌نامیم.

متناظر با $\{x : \langle |T|x, x\rangle \leq t\}$ می‌توان [۱۲] تصویری نظیر کرد که آن را با $e_{[0,t]}(|T|)$ نمایش می‌دهند. در این حالت تابع توزیع T برابر $\tau\left(e_{[0,t]}(|T|)\right)$ تعریف می‌گردد.

---
[1] Gelfand
[2] non-commutative probability space

همچنین متناظر با احتمال شرطی و امید شرطی در حالت جابجایی، می توان امید شرطی ناجابجایی را تعریف کرد: فرض کنید $(\mathcal{M}, \tau)$ یک فضای احتمال ناجابجایی و $\mathcal{N}$ یک زیرجبر فون‌نویمان از $\mathcal{M}$ باشد. امید شرطی نسبت به $\mathcal{N}$ یک نگاشت انقباضی مثبت نرمال $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}$ از $\mathcal{M}$ به روی $\mathcal{N}$ است که در شرط $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(ATB) = A\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(T)B$ برای هر $T \in \mathcal{M}$ و $A, B \in \mathcal{N}$ و نیز $\tau \circ \mathcal{E}_{\mathcal{N}} = \tau$ صدق می کند.

به این ترتیب، یک فضای احتمال (ناجابجایی) با فضای هیلبرت و یک جبر عملگرهای کراندار روی آن تعبیر می‌شود.

۵. نامساوی‌های احتمالی

نامساوی‌های احتمالی کران‌های بالا و پایینی را برای کمیت‌هایی مانند مقدار احتمال یک پیشامد یا امید یک متغیر تصادفی تعیین می‌کنند. اهمیت این کران‌ها برای کنترل مقادیر احتمال یا امید در حالت‌هایی است که محاسبه دقیق این کمیت‌ها ممکن نیست. فرمول‌بندی ریاضیِ نظریه احتمال ناجابجایی یا کوانتومی [۱۵] ابتدا به منظور ارائه توصیف احتمالی آزمایشات مکانیک کوانتوم توسعه یافت. در این آزمایشات مشاهداتی رخ می‌دهد که از محدوده نامساوی‌های احتمالی ساده خارج می‌شوند و از این رو از جنبه نظریه احتمال کلاسیک قابل توصیف نیستند. برای مثال جان بل اولین نوع از نامساوی‌های ناجابجایی را در مقاله‌اش با عنوان "پارادوکس انیشتین–پودولسکی–روزن" منتشر کرد که در چارچوب نظریه احتمال کلاسیک قابل بررسی نبود. همان‌طور که انتظار می‌رود این سوال به ذهن خطور می‌کند که چه نتایجی از نظریه احتمال برای فضاهای احتمال ناجابجایی برقرار هستند؟ از آنجا که مبحث نامساوی‌ها برای بدست آوردن یک کران و تخمین احتمال رخداد یک پیشامد یا امید مجموع چند متغیر تصادفی، نامساوی‌های مرتبط با مارتینگل‌ها [۱۶] و ... بسیار اساسی و حائز اهمیت است، آیا می‌توان نسخه‌ای از آن‌ها را در حوزه جبرهای فون‌نویمان ناجابجایی بدست آورد؟

بسیاری از خواص و قضایایی که در مورد فضاهای احتمال کلاسیک برقرار است، در حالت ناجابجایی هم صدق می‌کنند و برخی از ابزارهایی که در مورد جابجایی به کار می‌روند، هنوز هم کارآ خواهند بود. اما با این حال در اغلب اوقات لازم است که از تکنیک‌های جدیدی بهره گرفت. از معضلاتی که در مطالعه فضای احتمال ناجابجایی با آن مواجه می‌شویم، می‌توان برای مثال به نامساوی قدرمطلق برای دو عملگر اشاره کرد و یا این که در حالت کلی از نامساوی $\circ \leq x \leq y$، نمی‌توان نتیجه

گرفت $y^t \leq x^t \leq 0$. در واقع این نابرابری فقط برای $0 \leq t \leq 1$ برقرار است. یکی دیگر از دشواری‌های پیش رو این است که بر خلاف حالت جابجایی که می‌دانیم ماکزیمم نقطه‌وار دو متغیر تصادفی قابل تعریف است، در حالت کلی هیچ تضمینی برای وجود ماکزیمم دو عملگر مثبت وجود ندارد؛ [۱۴]. در میان نامساوی‌های مهم می‌توان به نامساوی‌های زیر اشاره کرد.

نامساوی چبیشف: نامساوی چبیشف بیان می‌کند که در هر نمونه تصادفی تقریباً همه مقادیر در حول و حوش میانگین قرار دارند. در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ این نامساوی به صورت

$$P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \geq t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int_{|X| \geq t} |X|^p dP$$

بیان می شود که در آن $1 \leq p < \infty$. صورت ناجابجایی این نامساوی عبارت است از $\tau(e_{[t,\infty)}(|T|)) \leq t^{-p}\tau(|T|^p)$ است؛ ر. ک. [۱۸].

نامساوی هوفدینگ: نامساوی هوفدینگ برای محدود کردن جمع تعدادی متغیر تصادفی مستقل کراندار به کار می‌آید. صورت جابجایی این نامساوی بیان می کند که اگر $a \leq X_1, \dots, X_n \leq b$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و امید همه آن‌ها برابر μ باشد، آنگاه $P(|\overline{X}_n - \mu| \geq t) \leq 2e^{-2nt^2/(b-a)^2}$ که در آن $\overline{X}_n = (\sum_{i=1}^n X_i)/n$. صورت ناجابجایی این نامساوی [۱۳] به این صورت است که اگر $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_j \subseteq M$ به مفهومی خاص مستقل باشند، $a_j \leq T_j \leq b_j$ عناصر خودالحاق باشند و $\mathcal{E}_{\mathcal{N}}(T_j) = \mu$، آنگاه

$$\tau\left(e_{[t,\infty)}\left(\left|\sum_{j=1}^n T_j - n\mu\right|\right)\right) \leq 2\exp\left\{\frac{-2t^2}{\sum_{j=1}^n (b_j - a_j)^2}\right\}.$$

نامساوی کولموگروف: نامساوی کولموگروف کرانی بالا برای احتمال این که مجموع یک تعداد متناهی متغیر تصادفی مستقل بیشتر از یک مقدار مشخص باشد به دست می دهد. صورت جابجایی آن می گوید که اگر X_jها n متغیر تصادفی مستقل با امید صفر و واریانس متناهی باشند، آنگاه برای هر $\lambda > 0$ نامساوی

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left|\sum_{j=1}^k X_j\right| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_j^2$$

برقرار است. صورت ناجابجایی این نامساوی [۱۷] بیان می‌کند که اگر عناصر خودالحاق $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ به مفهومی خاص مستقل باشند و برای هر k، داشته باشیم $\tau(A_k) = 0$، آنگاه برای هر $\lambda > 0$

یک تصویر E وجود دارد که

$$۱ - \frac{۲(\lambda + \max_{۱\leq k\leq n} \|A_k\|)^۲}{\sum_{k=۱}^{n} \mathrm{var}(A_k)} \leq \tau(E) \leq \frac{\tau\left(\left(\sum_{k=۱}^{n} A_k\right)^۲\right)}{\lambda^۲}$$

که در آن انحراف معیار A به صورت $\mathrm{var}(A) = \tau((A-\tau(A))^۲)$ تعریف می شود.

مراجع

[۱] جهانی پور، ر.، (۱۳۸۵) *نیوتن و لایب نیتز، سپس کیوشی ایتو*، فرهنگ و اندیشه ریاضی. جلد ۲۵، شماره ۳۶، صص. ۶۶ تا ۶۱.

[۲] راس، ش.، *مبانی نظریه احتمال*، ترجمه دکتر احمد پارسیان و دکتر علی همدانی (۱۳۹۰).

[۳] ظهوری زنگنه، ب.، (۱۳۸۵) *دوب آنالیزدان تمام عیار*، فرهنگ و اندیشه ریاضی، جلد ۲۵، شماره ۳۷، صص. ۸۹ تا ۷۱.

[۴] علیشاهی، ک.، (۱۳۸۸) *پیوند احتمال و آنالیز ریاضی*، اندیشه آماری، جلد۱۴، شماره ۲، صص. ۳۵ تا ۴۶.

[۵] گریبیل، الف. و بوز، د. س.، *مقدمه‌ای بر نظریه آمار*، ترجمه علی مشکانی (۱۳۷۷).

[۶] ویکی پدیا.

[7] R. M. Dudley (2002), *Real analysis and probability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 74. Cambridge University Press.

[8] U. Franz and A. Skalski (2016), *Noncommutative mathematics for quantum systems*, Cambridge University Press.

[9] A. Gut (2013), *Probability: a graduate course*, Second edition, Springer Texts in Statistics, Springer, New York.

[10] K. Ito (1984), *Introduction to probability theory*, Translated from the Japanese by the author. Cambridge University Press, Cambridge.

[11] M. Junge and M. Perrin (2014), *Theory of $\mathcal{H}_p$-spaces for continuous filtrations in von Neumann algebra*, Astérisque, no. 362.

[12] R. V. Kadison and J. R. Ringrose (1983), *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I*, Academic Press, New York.

[13] M. S. Moslehian and Gh. Sadeghi (2016), Inequalities for sums of random variables in noncommutative probability spaces, *Rocky Mountain J. Math.*, **46**, no. 1, 309–323.

[14] M. S. Moslehian and A. Talebi (2019), Non-commutative Stein inequality and its applications, *Comm. Statist. Theory Methods*, **48**, no. 7, 1611–1620.

[15] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1955.

[16] G. Pisier (2016), *Martingales in Banach spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 155. Cambridge University Press, Cambridge.

[17] A. Talebi, M. S. Moslehian and Gh. Sadeghi (2019), Etemadi and Kolmogorov inequalities in noncommutative probability spaces, *Michigan Math. J.* **68**, no. 1, 57–69.

[18] A. Talebi, M. S. Moslehian and Gh. Sadeghi (2018), Noncommutative Blackwell–Ross martingale inequality, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **21**, no. 1, id. 1850005-91, DOI: 10.1142/S0219025718500054.

[19] T. Tao (2012), *Topics in random matrix theory*, Graduate Studies in Mathematics, 132. American Mathematical Society, Providence, RI.

[20] Q. Xu (2007), *Operator spaces and noncommutative* L_p, Lectures in the Summer School on Banach spaces and Operator spaces, Nankai University China.

(قدیر صادقی) **گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار**
رایانامه: `g.sadeghi@hsu.ac.ir`

(علی طالبی) **گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد**
رایانامه: `alitalebimath@yahoo.com`

(محمد صال مصلحیان) **گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد**
رایانامه: `moslehian@am.ac.ir`