نقد کتاب های حسابان (۱) و (۲)

محمد صال مصلحیان

دانشگاه فردوسی مشهد

پایه دوازدهم

دورۀ دوم متوسطه

➢جنبه های مثبت این دو کتاب:

- ✓ حجم کم مطالب آموزشی
- ✓ توجه به شهود ریاضی
- ✓ فعالیتهای قدم به قدم دانش آموزان، به سوی یافتن درک درستی از مفاهیم ریاضی
- ✓ وجود تمرینهای هدفمند
- ✓ استفاده از تصاویر واقعی برای نشان دادن نقش ریاضیات در مدلسازی
- ✓ رنگی بودن اشکال و مطالب کتاب

اساسا کتاب حسابان ۱ و کتاب حسابان ۲ قابل مقایسه نیستند،

زیرا حسابان ۱ از دقت در بیان و استحکام استدلال و نیز محتوای
ریاضی غنی برخوردار است که حسابان ۲ چنین نیست.

حسابان (۱)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

پایهٔ یازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

نقد کتاب حسابان ۱

➢ کتاب حسابان ۱ دارای مفاهیم عمیق، اثباتهای زیبا، مساله های جدی و فعالیتهای موثری است:

هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

✤ **مثال :** نشان دهید برای اعداد حقیقی مثبت a، b و c، که $c\neq 1$، همواره داریم :

$$\log_c ab=\log_c a+\log_c b$$

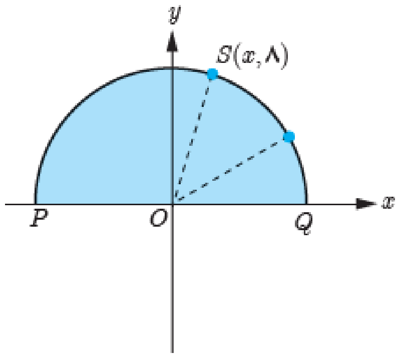
✤ **حل :** فرض کنیم $x=\log_c a$ و $y=\log_c b$. پس طبق تعریف، $a=c^x$ و $b=c^y$. از این رو $ab=c^x.c^y=c^{x+y}$
و طبق تعریف لگاریتم داریم $\log_c ab=x+y$. در نتیجه $\log_c ab=\log_c a+\log_c b$.

۶ نقطهٔ $S(x,۸)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه‌رو داده شده است.

الف) مقدار x را به‌دست آورید.

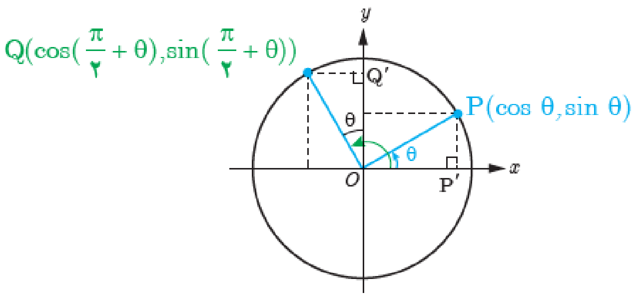
ب) شیب خط‌های PS و SQ را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید $P\hat{S}Q$ قائمه است.



فعالیت

در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{2}+\theta$ رسم شده‌اند.



الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $O\overset{\Delta}{P}P'$ و $O\overset{\Delta}{Q}Q'$ هم‌نهشت هستند.

ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q=-y_p \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$$

$y_Q=$ ....

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=$ ....

$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=$ ....

به‌طور کلی برای دو زاویهٔ θ و $\frac{\pi}{2}+\theta$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$$

بنابراین، دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به‌جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند مقدار حد آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

✤ **مثال :** مقدار حد راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ را در نقطهٔ $x=0$ به دست آورید.

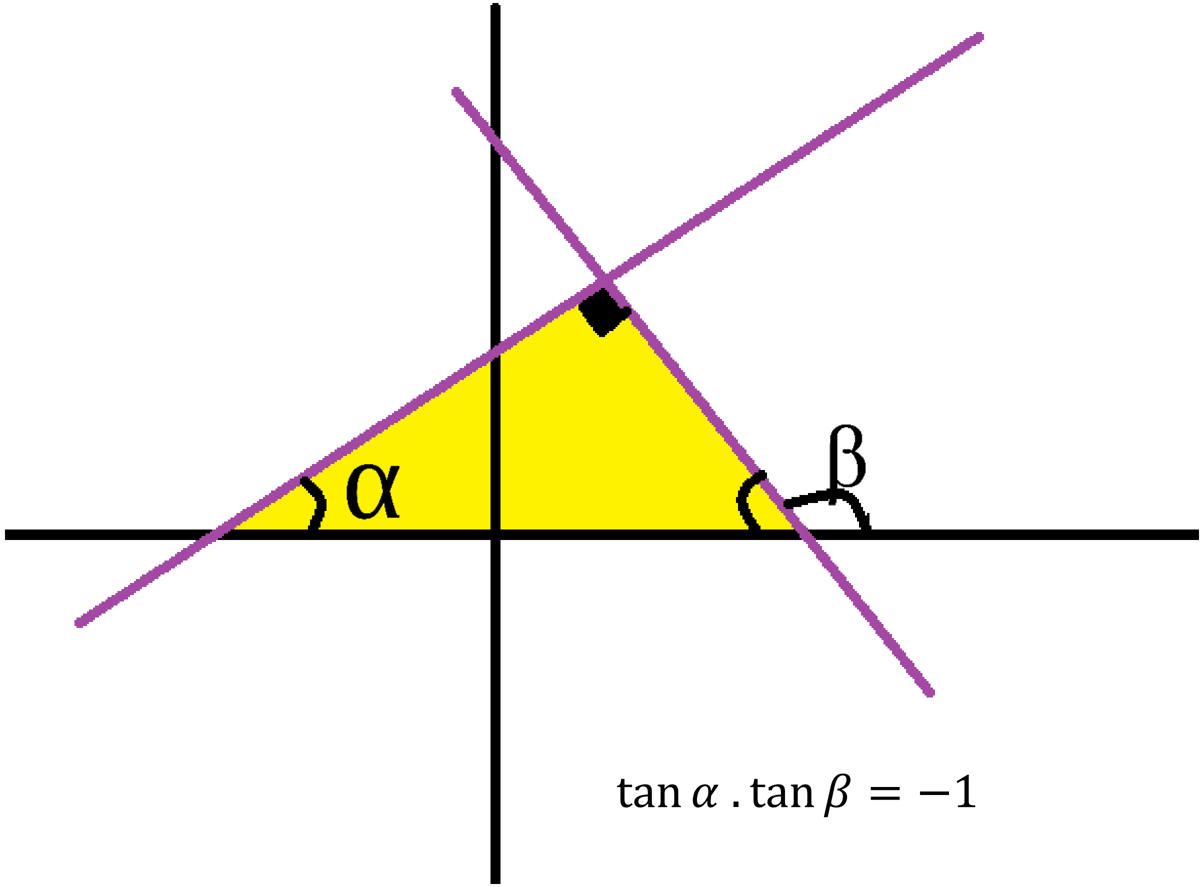
✤ **حل :** می‌دانیم روی بازهٔ $(0,1)$ مقدار $[x]$ برابر صفر است، پس روی بازهٔ $(0,1)$ تابع f با تابع ثابت $g(x)=0$ برابر است

بنابراین :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^+} g(x)=0$$

به‌طور کلی:

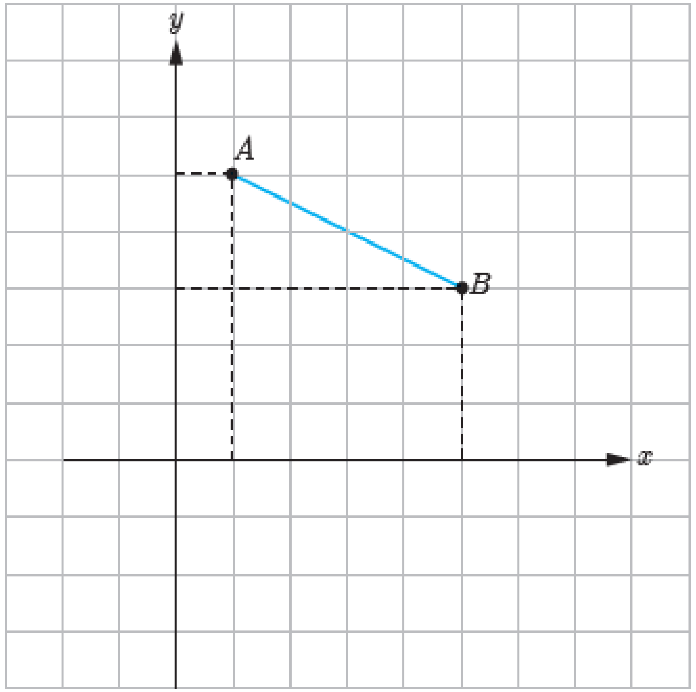
اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $mm'=-1$ و برعکس.



$\tan\alpha \,.\, \tan\beta = -1$

می توان اثباتی ساده مبتنی بر تانژانت مجموع دو زاویه ارائه کرد:

کاردرکلاس



اگر $A(۱,۵)$ و $B(۵,۳)$ دو سر پاره‌خط AB و $M(a,b)$ وسط این پاره‌خط باشد :

الف) تصویر نقاط A و B و M را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

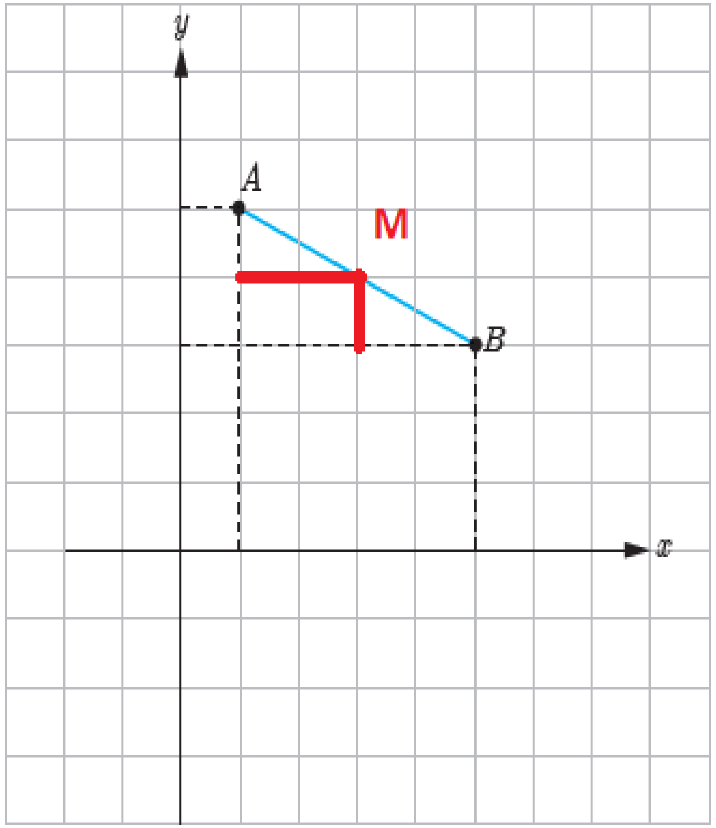
ب) با توجه به تصویر نقاط A و B و M روی محورهای مختصات نقطه M را به‌دست آورید.

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره‌خط AB باشد. مختصات نقطه M برابر است با :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

کار در کلاس

➢ **می‌توان اثباتی ساده مبتنی بر قضیه تالس ارائه کرد:**



اگر $A(۱,۵)$ و $B(۵,۳)$ دو سر پاره‌خط AB و $M(a,b)$ وسط این پاره‌خط باشد:

الف) تصویر نقاط A و B و M را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

ب) با توجه به تصویر نقاط A و B و M روی محورهای مختصات نقطه M را به‌دست آورید.

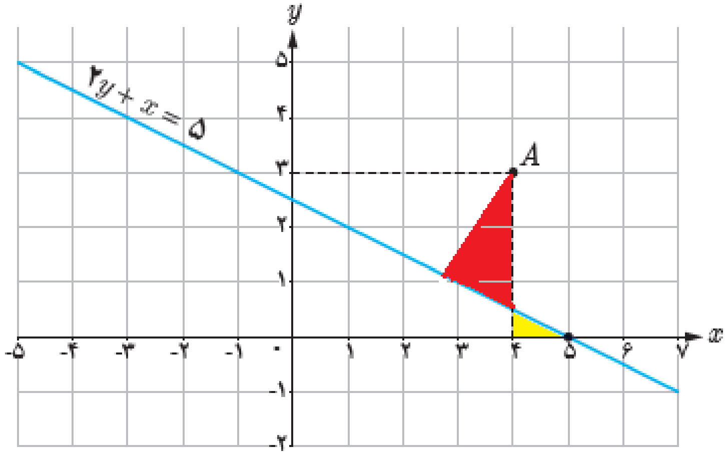
اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره‌خط AB باشد. مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

می توان اثباتی ساده مبتنی بر تشابه مثلثها ارائه کرد:

فعالیت

در شکل روبه‌رو خط d به معادله $2y+x=5$ و نقطه $A(4,3)$ داده شده است.



۱ عمود AH را بر خط d رسم کنید.

۲ رابطه بین شیب‌های دو خط d و AH را به‌دست آورید.

۳ شیب AH را به‌دست آورده و معادله خط AH را بنویسید.

۴ دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه H) را به‌دست آورید.

۵ طول پاره‌خط AH را محاسبه کنید.

به‌طور کلی اگر بخواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ را به‌دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که طول عمود AH برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

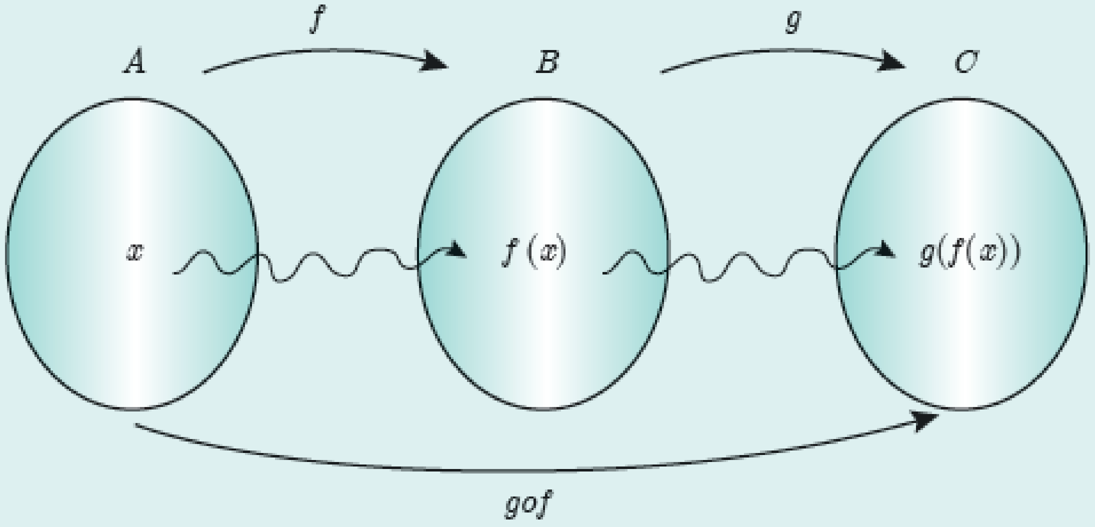
که در آن، وجود علامت قدرمطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.[1]

۱ــ از اثبات فرمول به دلیل طولانی شدن صرف نظر می‌شود. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند خود به اثبات آن بپردازند.

➢ اشتباههای جزئی نیز در کتاب وجود دارد. مانند تعریف ترکیب دو تابع:

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم ~~؛ به‌شرط آنکه مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند~~ :

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



و

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به‌طور مشابه ترکیب f با g یعنی fog را می‌توان تعریف کرد.

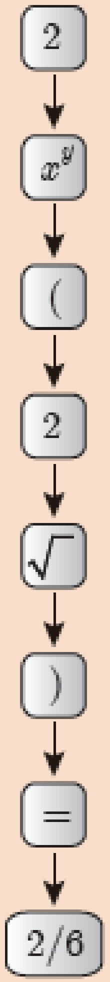
- مطالب گیج کننـــده هــم در کتـــاب وجود دارد که مانند مفهـــوم $3^{\sqrt{5}}$.

در واقع در این کتاب فقط باید پایه های گویا (مثبت) و نماهــای گویـــا (مثبت) به صورت زیر تعریف شـــود:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

خواندنی

به دلیل افزایش حجم محاسبات در زندگی روزمره، بیش از گذشته به ماشین حساب نیازمندیم. برای محاسبه $۲^{\sqrt{۲}}$ مراحل روبه‌رو را انجام می‌دهیم :



اکنون مقادیر $۲^{۰/۵}$، $۳^{\sqrt{۵}}$، $۳^{۱+\sqrt{۲}}$ و $۳^{۱-\sqrt{۵}}$ را تا دو رقم اعشار با استفاده از ماشین حساب به‌دست آورید.

ت) نقطهٔ $x = \sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

حسابان (۲)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

نقد حسابان ۲

پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

➢ نقدهای اساسی وارد بر این کتاب:

- قربانی نمودن دقت و اثبات ریاضی به پای شهود و شم ریاضی
- تأکید زیاد بر نمودار توابع که جای مثالهای عددی را گرفته است.
- به اثباتهای ریاضی ساده که به درک دانش آموز از مفهوم برهان کمک می کند توجه کافی و وافی نشده است.

- این قضیه را می توان در حالت کلی با همان روش مثال ثابت کرد.
بهتر است این کار انجام شود.

فعالیت

در تقسیم $f(x) = x^3 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌اند.

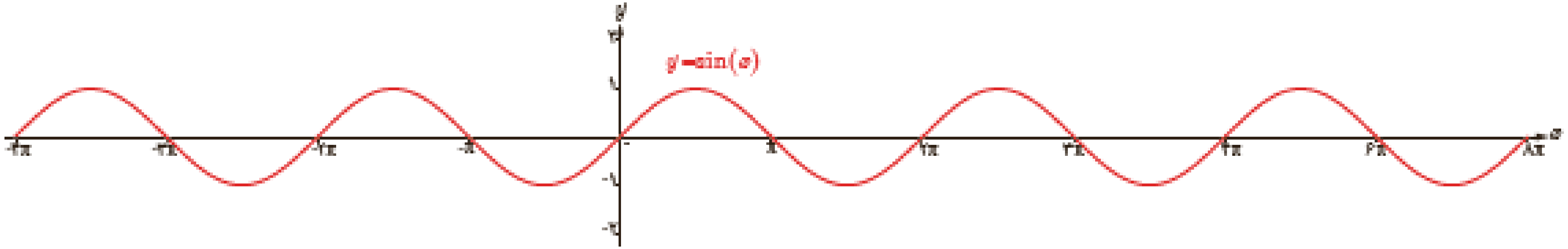
الف) نشان دهید که $r(x)$ از درجه صفر است.

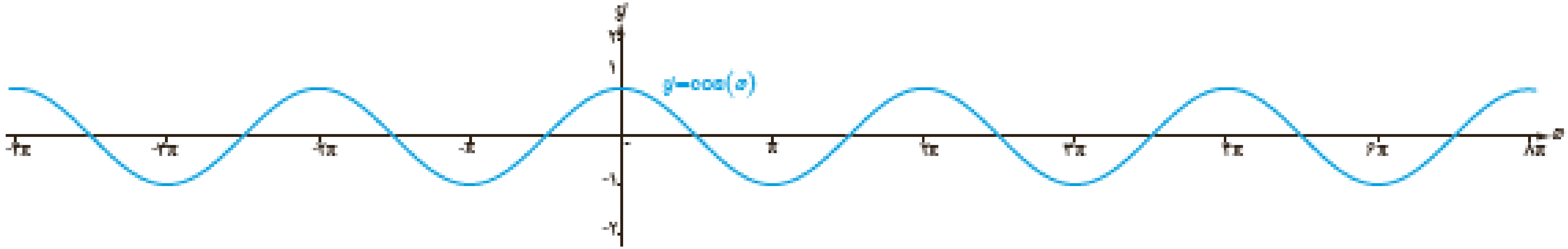
ب) با توجه به قضیه تقسیم می‌توان نوشت:

$$f(x) = (2x-1)\ q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله‌ای $p(x) = 2x - 1$ را به‌دست آورید و با قرار دادن در رابطه بالا نشان دهید که $r(x) = f(\frac{1}{2})$. به‌طور کلی می‌توان گفت:

قضیه: باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت‌است از $r(x) = f(\frac{-b}{a})$.





با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول ۲π، ۴π، ۶π و . . . تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان ۲π است. چنین توابعی را توابع متناوب و ۲π را دورهٔ تناوب آنها می‌نامیم.

- **می توان کنار شهود ریاضی، دقت ریاضی را نیز آموزش داد و بر اهمیت اثباتهای متقن تاکید کرد.**

اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

اگر $T \neq 0$ به گونه‌ای باشد که برای هر x، $\sin(x+T) = \sin x$ آنگاه

$$\sin(x+T) - \sin x = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$2\sin\frac{x+T-x}{2}\cos\frac{x+T+x}{2} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

چون این رابطه باید برای هر x برقرار باشد، باید $\sin\frac{T}{2} = 0$. پس $T = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$

لذا کوچکترین عدد نا صفر (ومثبت) T عبارت است از 2π.

بنابراین دوره تناوب تابع سینوس عبارت است از $T = 2\pi$.

برای اثبات این که π دوره تناوب تابع تانژانت است می‌توان از اتحاد $\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} = \tan x - \tan y$ استفاده کرد.

➢ **با توجه به این که مقادیر سینوس وکسینوس همواه بین -1 و 1 است می توان اثباتی از مطلب زیر برای دانش آموزان ارائه کرد.**

توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

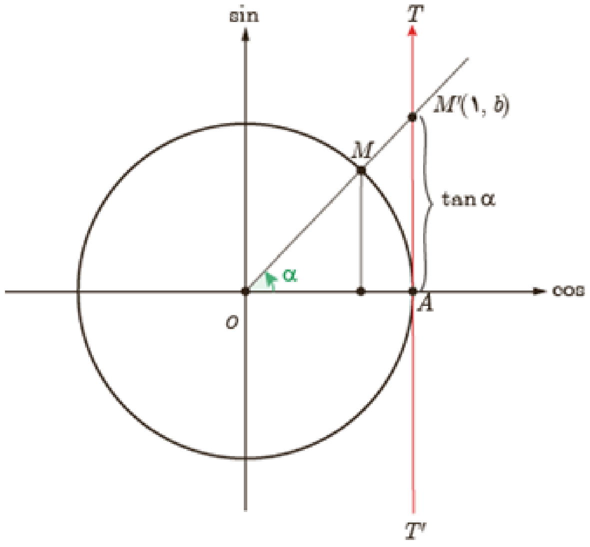
➢ این سوال ها اشـــتباه طرح شده اند، زیــرا اساسا تابع تانژانت در نقاط $\pi/2$ و $3\pi/2$ تعریف نمی شود.

این ســــوالات بــد آموزی دارند.

تانژانت

فعالیت

آیا مقدار $\tan\frac{\pi}{۲}$ عددی حقیقی است؟ $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.



صفحه 29 کتاب حسابان2

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $k\in\mathbb{Z}\ ,\ x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y=\tan\alpha$ مشخص می کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y=\tan\alpha$، تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا :

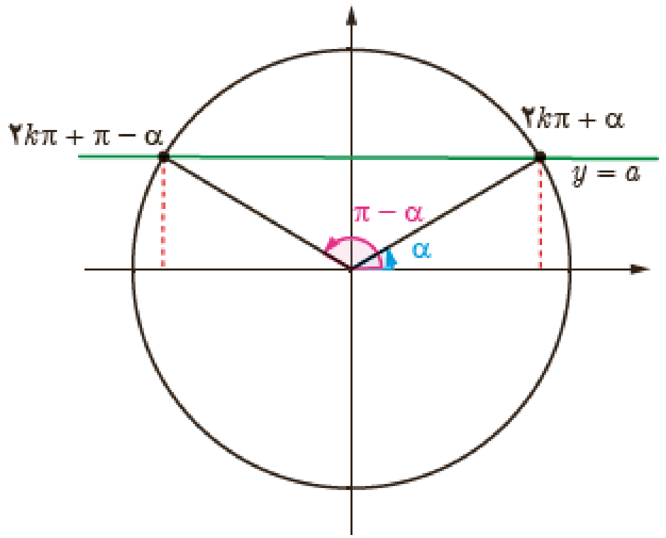
$$\tan(\pi+x)=\tan x$$

صفحه 32 کتاب حسابان 2

برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به‌صورت $\sin x = \sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی زیر رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x = \sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است :

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = (2k+1)\pi - \alpha \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$



➢ در اینجا نیز دوباره می توان از اتحاد های مثلثاتی برای حل معادله Sinx=a کمک گرفت:

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

برای حل معادله $\sin x = a$ ابتدا زاویه‌ای مانند α می‌یابیم که $\sin\alpha = a$.
اینک داریم

$$\sin x = \sin\alpha$$

$$\sin x - \sin\alpha = 0$$

$$2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2} = 0$$

$$\boxed{\begin{cases} \sin\frac{x-\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x-\alpha}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \\ \text{یا} \\ \cos\frac{x+\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x+\alpha}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}}$$

از اثباتهای نادر کتاب می توان به اثبات زیر اشاره کرد:

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تانژانت به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\,\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\,\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

همچنین با تغییر β به $-\beta$ در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

➢ حدهای بینهایت وجود دارند ولی مقدار این حدها عدد حقیقی نیست.

با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیریم بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty$.

✤ **تذکر :** این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و مثبت بی‌نهایت فقط یک نماد است که نمایش می‌دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می‌تواند بزرگ‌تر باشد.

در ریاضیات می گوییم "بی نهایت مقداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است"
این مفهومی است که در "حد در بی نهایت" در نظر گرفته می شود.

صفحه 50 کتاب حسابان 2

این مطلب کاملا درست است، یعنی:
مثبت بینهایت عدد جدیدی است (اما نه یک عدد حقیقی) که از همهٔ اعداد حقیقی بزرگتر است.
می توان آن را انتهای راست محور اعداد حقیقی در نظر گرفت:

$$\forall x; \quad -\infty < x < +\infty$$

به عنوان مثال در حد تابع می‌گوییم $x \to \infty$ یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده‌ای بزرگ‌تر باشد.

صفحه 50 کتاب حسابان 2

✗ چیزی به نام میل کردن یک متغیر به سمت یک عدد یا بینهایت در ریاضیات نداریم.

✓ در واقع ما مفهوم حد تابع با دنباله را به عنوان یک مفهوم جامع داریم.

۱ـ ما در این کتاب به بیان برخی از قضایای حدهای بی‌نهایت پرداخته و آنها را اثبات نمی‌کنیم.

فصل سوم : حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت ۵۱

کتاب حتی به اثبات یک حد برای نمونه نیز نپرداخته است مانند:

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x^۴} = +\infty$$

➢ از اثباتهای نادر کتاب می توان به اثبات زیبای زیر اشاره کرد:

۸۶

قضیه : اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}\left((x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\right) =$$

$$\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = ۰ .f'(a) = ۰$$

بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = ۰$ و از آنجا $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مثال زیر نمونه ای از نفی غرض (بالا) است!

به‌طور خلاصه می‌توان گفت :

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد[1].

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

۱ــ همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

با سپاس از توجه شما

☺