باسمه تعالی

تمرینات تحویلی درس نظریه احتمال یک
نیمسال دوم سال ۱۳۹۶

تمرینات تحویلی سری یک

۱. حل تمرین ۵,۲ صفحه ۶ کتاب گات قسمت‌های b و c.

۲. حل تمرین ۲,۴ صفحه ۱۷ کتاب گات.

۳. حل تمرین ۳,۴ صفحه ۱۷ کتاب گات.

۴. فرض کنید $\{A_n; n \geq 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای تصادفی باشد. مطلوب است:

الف) اگر $P(A_n) = \frac{1}{2^n}$ آن‌گاه $P(A_n; i.o.) = \cdots$. چرا؟

ب) اگر $P(A_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ آن‌گاه $P(A_n; i.o.) = \cdots$. چرا؟

ج) اگر $P(A_n) = 1$ آن‌گاه $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \cdots$. چرا؟

د) اگر $P(A_n) = 0$ آن‌گاه $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \cdots$. چرا؟

ه) اگر $P(A_n) = \left(1 + e^{-n}\right)^{-1}, n \geq 1$ آن‌گاه $P(A_n; i.o.) = \cdots$. چرا؟

۵. حل تمرین ۱,۱ صفحه ۲۷ کتاب گات.

۶. فرض کنید $\{A_n; n \geq 1\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای تصادفی مستقل با $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ باشد. نشان دهید: $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^C) = 0$.

۷. اگر $\Omega = [0,1]$ اندازه احتمال لبگ و $\alpha > 1$ برای هر $n \geq 1$، $A_n = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n^{\alpha}}\right)$، آن‌گاه نشان دهید $P(A_n; i.o.) = 0$.

۸. اگر $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$، آن‌گاه عناصر $A = \sigma(\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\})$ را مشخص نمایید.

۹. اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند و $B_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$، آن‌گاه نشان دهید:

$$\sigma(A_1, A_2, \cdots, A_n) = \sigma(B_1, B_2, \cdots, B_n).$$

۱۰.فرض کنید $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ با $P(\{\omega_1\}) = 0.1, P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_5\}) = 0.2, P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_4\}) = 0.25$ و

$$A_1 = \sigma(\phi, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}, \Omega),\ A_2 = \sigma(\phi, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega)$$

آیا دو سیگما جبر فوق مستقل هستند؟ چرا؟