مسائل

۱. دو توپ را به تصادف از ظرفی با ۸ توپ سفید، ۴ توپ سیاه و ۲ توپ نارنجی انتخاب می‌کنیم. فرض کنید برای هر توپ سیاه ۲ ریال جایزه و برای هر توپ سفید انتخاب شده ۱ ریال جریمه شویم. اگر X نشان دهنده میزان برد باشد مقادیر ممکن X و احتمال مربوط به هر مقدار را بدست آورید. مثال ۱-۴ ۱۲۸

۲. سه تاس را پرتاب می‌کنیم، فرض کنید تمامی $۲۱۶ = ۶^۳$ نتایج ممکن هم شانس باشند. اگر X نشان دهنده جمع سه عدد حاصل شده درهر پرتاب باشد، احتمال مقادیری که X انتخاب می‌کند را بدست آورید.

۴. ۵ مرد و ۵ زن را براساس امتیازی که در یک امتحان کسب می‌کنند، رتبه‌بندی می‌کنیم. فرض کنید هیچ دو امتیازی یکسان نباشد و تمامی !۱۰ حالت مختلف رتبه‌بندی هم شانس باشند. اگر X نشان دهنده بالاترین رتبه کسب شده توسط یک زن باشد (مثلاً $X = ۱$ یعنی اینکه رتبه اول زن است) مطلوب است:

$$P\{X = i\} \qquad\qquad i = ۱, ۲, \ldots, ۱۰$$

۵. سکه‌ای را n مرتبه پرتاب می‌کنیم، اگر اختلاف بین تعداد شیرها و تعداد خط‌های ظاهر شده را با X نشان دهیم. مقادیر ممکن X چه هستند؟

۶. درمسأله ۵ اگر سکه سالم‌باشد،برای $n = ۳$ احتمال‌های‌مربوط به‌مقادیر ممکن X را بدست آورید.

۷. فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم. متغیرهای تصادفی زیر چه مقادیری را می‌توانند اختیار کنند.

الف) بیشترین عددی که در دو پرتاب حاصل می‌شود.

ب) کمترین عددی که در دو پرتاب حاصل می‌شود.

ج) مجموع دو عدد حاصل شده.

د) عدد ظاهر شده اولین پرتاب منهای عدد ظاهر شده دومین پرتاب.

۸. اگر تاس مسأله ۷ سالم باشد، احتمال‌های مربوط به متغیرهای تصادفی قسمت‌های (الف) تا (د) را بدست آورید.

۹. مثال ۱-۲ را وقتی که توپها با جایگذاری انتخاب می‌شوند حل کنید.

۱۰. در مثال ۱-۴ ، احتمال شرطی اینکه مبلغ i ریال برنده شویم بشرط اینکه مبلغی برنده شده باشیم را بدست آورید. (برای $i = ۱, ۲, ۳, \ldots$).

۱۱. الف) یک عدد صحیح N را از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰^۳\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم بطوریکه هر عدد شانس مساوی انتخاب شدن داشته باشد. احتمال اینکه عدد N بر ۳

قابل قسمت باشد چقدر است؟ چنانچه بجای 10^3، عدد 10^k جایگزین شود و k بزرگ و بزرگتر شود. آنگاه پاسخ‌ها چگونه تغییر می‌یابند.

ب) تابعی مهم در نظریه اعداد وجود دارد که خصوصیات آن در ارتباط با احتمالاً مهمترین مسأله حل نشده ریاضیات، یعنی فرضیه ـ ریمان مطرح است. این تابع به نام تابع موبیوس $\mu(n)$ معروف است که برای همه مقادیر صحیح مثبت n بصورت زیر تعریف می‌شود: n را به فاکتورهای اول تجزیه می‌کنیم اگر یکی از فاکتورهای اول در تجزیه تکرار شود (مانند $12 = 2 \times 2 \times 3$ یا $49 = 7 \times 7$) آنگاه $\mu(n)$ برابر صفر تعریف می‌شود. حال فرض کنید عدد N را به تصادف از مجموعه اعداد $\{1, 2, \dots, 10^k\}$ وقتی که k بزرگ باشد انتخاب می‌کنیم، مطلوب است محاسبه $P\{\mu(N) = 0\}$ وقتی که $k \to \infty$

راهنمایی: برای محاسبه $P\{\mu(N) \neq 0\}$ از رابطه زیر استفاده کنید.

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{P_i^2 - 1}{P_i} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{24}{25}\right)\dots = \frac{6}{\pi^2}$$

وقتی که p_i، عدد اول i ام است. (عدد ۱ را عدد اول درنظر نمی‌گیریم.)

۱۲. در بازی «دو انگشت مورا» دو بازیکن یک یا دو انگشت خود را همزمان نشان داده و در همان حال حدس می‌زنند که طرف مقابل چند انگشت نشان می‌دهد. اگر فقط یکی از بازیکن‌ها درست حدس بزند او به اندازه جمع انگشت‌هایی که نشان داده شده جایزه می‌گیرد. اگر هر دو بازیکن درست حدس بزنند و یا هیچکدام حدس صحیح نزنند آنگاه هیچ جایزه‌ای داده نمی‌شود. یکی از بازیکن‌ها را در نظر گرفته و میزان جایزه‌ای که در یک بازی به او تعلق می‌گیرد را با X نشان دهید.

الف) اگر بازیکن‌ها بطور مستقل حدس بزنند و هر یک از چهار حالت نشان دادن انگشت‌ها هم شانس باشند، مقادیر مختلف X و احتمال‌های مربوطه را بدست آورید.

ب) اگر بازیکن‌ها بطور مستقل حدس بزنند و هر بازیکن تعداد انگشتانی را نشان بدهد که حدس می‌زند طرف مقابل نشان خواهد داد و بعلاوه نشان دادن یک انگشت یا دوانگشت هم شانس باشد، مقادیر X و احتمال‌های مربوطه را بدست آورید.

۱۳. یک بازاریاب برای فروش کتاب با دو نفر وعده ملاقات دارد. در ملاقات اول او با احتمال ۰/۳ می‌تواند کتاب را بفروشد و در ملاقات دوم مستقل از نتیجه ملاقات اول با احتمال ۰/۶ قادر خواهد بود که کتاب را بفروش برساند. هر فروش با شانس برابر می‌تواند نوع با جلد شومیز و با قیمت ۱۰۰۰ ریال و یا نوع معمولی با قیمت ۵۰۰ ریال باشد. تابع احتمال میزان کل فروش (X) برحسب ریال را بدست آورید.

۱۴. ۵ عدد متفاوت را به تصادف بین بازیکن‌های ۱ تا ۵ تقسیم می‌کنیم. وقتی که دوبازیکن اعداد

خود را مقایسه می‌کنند کسی که عدد بزرگتری دارد برنده محسوب می‌شود. ابتدا بازیکن ۱ و ۲، اعداد خود را مقایسه می‌کنند، سپس برنده آنها با بازیکن شماره ۳ و به همین ترتیب بازی ادامه می‌یابد. اگر X نشان دهنده تعداد دفعاتی باشد که بازیکن ۱ برنده است. مطلوب است محاسبه:

$$P\{X = i\} \qquad i = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

۱۵. مؤسسه ملی بسکتبال (NBA) که شامل ۱۱ تیم است، بدترین رکوردهای برد و باخت در شرط‌بندی‌های سال گذشته را منتشر کرده است. ۶۶ توپ را در یک ظرف قرار داده هریک از این توپها با نام یکی از تیم‌ها نامگذاری شده، بطوریکه ۱۱ توپ به نام تیمی است که بدترین رکورد را داشته، ۱۰ توپ به نام تیمی که دومین رکورد بد را داشته، ۹ توپ به نام تیمی که سومین رکورد بد را داشته و به همین ترتیب یک توپ به نام تیمی که یازدهمین رکورد بد را بدست آورده نامگذاری شده‌اند. یک توپ را به تصادف انتخاب می‌کنیم، تیمی که نامش روی توپ است اولین حق انتخاب را برای ورود به مسابقات دارد. توپ دیگری را انتخاب می‌کنیم و اگر متعلق به تیم متفاوتی باشد آنگاه دومین حق انتخاب به او داده می‌شود (اگر توپ انتخاب شده متعلق به تیم اولی باشد آن را نادیده گرفته و توپ دیگری انتخاب می‌کنیم این عمل آنقدر ادامه می‌یابد تا تیم دوم انتخاب شود.) بالاخره توپ دیگری را انتخاب نموده و چنانچه متفاوت با دو تیم قبلی باشد حق انتخاب سوم به او داده می‌شود. بقیه حق انتخاب‌های ۴ تا ۱۱ را به ۸ تیمی که انتخاب نشدند بترتیب عکس رکورد برد و باخت آنها می‌دهند. بطور مثال اگر تیم با بدترین رکورد در سه انتخاب اول نباشد آنگاه آن تیم حق انتخاب چهارم را دریافت می‌دارد. اگر X نشان دهنده حق انتخاب تیمی با بدترین رکورد باشد، تابع احتمال X را بدست آورید.

۱۶. در مسأله ۱۵، فرض کنید تیم شماره ۱، تیمی با بدترین رکورد باشد و تیم شماره ۲، بدترین رکورد دوم را داشته باشد و ... اگر Y_i نشان دهنده تیمی باشد که حق انتخاب i ام را دریافت می‌دارد. یعنی اگر اولین توپ انتخاب شده متعلق به تیم شماره ۳ باشد، آنگاه $Y_۱ = ۳$ است. تابع احتمال الف) $Y_۱$، ب) $Y_۲$ و ج) $Y_۳$ را بدست آورید.

۱۷. فرض کنید که تابع توزیع تجمعی X بصورت زیر باشد.

$$F(b) = \begin{cases} ۰ & b < ۰ \\ \dfrac{b}{۴} & ۰ \le b < ۱ \\ \dfrac{۱}{۲} + \dfrac{b-۱}{۴} & ۱ \le b < ۲ \\ \dfrac{۱۱}{۱۲} & ۲ \le b < ۳ \\ ۱ & b \ge ۳ \end{cases}$$

الف) $P\{X = i\}$ ($i = ۱, ۲, ۳$)، را بدست آورید.

ب) $P\left\{ \frac{۱}{۲} < X < \frac{۳}{۲} \right\}$ را محاسبه کنید.

۱۸. سکه‌ای منظم را ۴ مرتبه بطور مستقل پرتاب می‌کنیم. اگر X نشان دهنده تعداد شیرهای ظاهر شده باشد. تابع احتمال متغیر تصادفی ۲ − X را رسم کنید.

۱۹. اگر تابع توزیع تجمعی X بصورت زیر داده شود.

$$F(b) = \begin{cases} ۰ & b < ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ \le b < ۱ \\ \frac{۳}{۵} & ۱ \le b < ۲ \\ \frac{۴}{۵} & ۲ \le b < ۳ \\ \frac{۹}{۱۰} & ۳ \le b < ۳/۵ \\ ۱ & b \ge ۳/۵ \end{cases}$$

تابع احتمال X را بدست آورید.

۲۰. یک کتاب بازی‌های برد و باخت، استراتژی برد را در یک بازی بصورت زیر تجویز می‌کند. این کتاب پیشنهاد می‌دهد که یک بازیکن ۱ ریال روی رنگ قرمز شرط‌بندی کند، اگر رنگ قرمز ظاهر شود (که احتمال $\frac{۱۸}{۳۸}$ دارد). آنگاه وی ۱ ریال جایزه‌اش را بردارد و متوقف شود. اگر او بازنده شد (که احتمال $\frac{۲۰}{۳۸}$ دارد) بایستی یک ریال دیگر روی رنگ قرمز در دور بعدی شرط‌بندی نموده و سپس بازی را متوقف نماید. اگر X نشان دهنده میزان بُرد وی باشد،

الف) $P\{X > ۰\}$ را بدست آورید.

ب) آیاقانع هستیدکه استراتژی مطرح شده یک استراتژی برد است؟ پاسخ خود را شرح دهید.

ج) $E[X]$ را بدست آورید.

۲۱. چهار اتوبوس که حامل ۱۴۸ دانش‌آموز از یک مدرسه هستند به یک استادیوم فوتبال وارد می‌شوند. اتوبوسها بترتیب حامل ۴۰ ، ۳۳ ، ۲۵ و ۵۰ دانش‌آموز هستند. یک دانش‌آموز را به تصادف انتخاب نموده، فرض کنید X نشان دهنده تعداد دانش‌آموزانی باشد که در اتوبوسی بوده‌اند که این دانش‌آموز انتخاب شده است. یکی از چهار راننده را نیز به تصادف انتخاب می‌کنیم، فرض کنید Y نشان دهنده تعداد دانش‌آموزان اتوبوس آن راننده باشد.

الف) کدامیک از مقادیر $E[X]$ و $E[Y]$ را فکر می‌کنید بزرگتر هستند؟ چرا؟

ب) مقادیر $E[X]$ و $E[Y]$ را محاسبه کنید.

۲۲. فرض کنید، ۲ تیم یک سری مسابقه با یکدیگر بدهند و وقتی که یکی از تیم‌ها i مرتبه برنده شد بازی متوقف گردد. اگردر هر بازی، تیم A با احتمال p برنده شود، امید ریاضی تعداد بازیها را در حالات الف) $i=2$ و ب) $i=3$ بدست آورید. همچنین در هر دو حالت نشان دهید که مقادیر امید ریاضی وقتی حداکثر می‌شوند که $p=\frac{1}{2}$ باشد.

۲۳. در یک جعبه شامل ۵ قطعه الکتریکی می‌دانیم که دو قطعه معیوب وجود دارد. اگر برای کشف قطعات معیوب، آنها را یک به یک و به تصادف آزمایش کنیم، امید ریاضی تعداد آزمایش‌های لازم را بدست آورید.

x	۲	۳	۴
$p(x)$	۱/۱۰	۳/۱۰	۳/۵

$EX = ۳/۵$

۲۴. A و B بازی زیر را انجام می‌دهند: A یکی از دو عدد ۱ یا ۲ را می‌نویسد و B بایستی حدس بزند که کدام عدد نوشته شده است. اگر عددی را که A می‌نویسد i $(i=1,2)$ باشد و B صحیح حدس بزند، آنگاه B، i امتیاز از A می‌گیرد. اگر B غلط حدس بزند او $\frac{3}{4}$ امتیاز به A می‌دهد. هرگاه B با احتمال p حدس بزند که ۱ نوشته شده و با احتمال $(1-p)$ حدس بزند که ۲ نوشته شده است. امید ریاضی امتیازهای او را در حالات زیر بدست آورید.

x	۱	$-\frac{3}{4}$
$p(x)$	p	$1-p$

الف) A عدد ۱ را نوشته است. $\Rightarrow EX = \frac{7}{4}p - \frac{3}{4}$

$\Rightarrow p = \frac{11}{18}$

ب) A عدد ۲ را نوشته است.

x	۲	$-\frac{3}{4}$
$p(x)$	$1-p$	p

$\to EX = 2 - \frac{11}{4}p$ $\quad EX = \frac{7}{4}\times\frac{11}{18} - \frac{3}{4} = \frac{23}{72}$

چه مقداری از p حداقل میزان امتیاز B را حداکثر می‌کند؟ و این حداکثر مقدار چقدر است؟.(توجه کنید که امید ریاضی امتیاز B نه تنها بستگی به p دارد بلکه بستگی به اینکه A چه عددی را می‌نویسد نیز دارد.)

حال فرض کنید بازیکن A نیز با احتمال q عدد ۱ را بنویسد. امید ریاضی میزان امتیازی که وی از دست می‌دهد را در حالات زیر بدست آورید.

x	$-\frac{3}{4}$	۱
$p(x)$	$1-q$	q

ج) B عدد ۱ را انتخاب کند. $EX = \ldots$

د) B عدد ۲ را انتخاب کند. $EX = \ldots$ $\to q = \frac{11}{18}$

x	۲	$-\frac{3}{4}$
$p(x)$	$1-q$	q

چه مقداری از q حداکثر امتیاز از دست داده A را حداقل می‌کند. نشان دهید که حداقل مقدار بیشترین امتیاز از دست داده A با حداکثر مقدار کمترین امتیاز بدست آمده توسط B برابر هستند. این نتیجه بعنوان «قضیه مینماکس» شناخته می‌شود که ابتدا توسط ریاضیدان مشهور جان ـ ون ـ نیومن بعنوان نتیجه اساسی نظریه بازیها بنیانگذاری شد و مقدار فوق، ارزش بازی برای بازیکن B نامیده می‌شود.

۲۵. یک ماشین سرگرمی دارای سه گردونه است که روی هر کدام ۲۰ علامت بصورت شکل‌های پرتقال، لیمو، آلو، آلبالو، زنگوله و شمش قرار دارد که تعداد آنها بصورت زیر تنظیم شده است:

	گردونه ۱	گردونه ۲	گردونه ۳
آلبالو	۷	۷	۰
پرتقال	۳	۷	۶
لیمو	۳	۰	۴
آلو	۴	۱	۶
زنگوله	۲	۲	۳
شمش	۱	۳	۱
جمع	**۲۰**	**۲۰**	**۲۰**

براساس جدول فوق مثلاً در گردونه ۱ ، ۷ علامت آلبالو، ۳ علامت پرتقال و ... قرار دارد. میزان برد و باخت در یک شرط‌بندی این بازی نیز براساس جدول زیر تعیین گردیده است.

گردونه ۱	گردونه ۲	گردونه ۳	میزان برد و باخت
شمش	شمش	شمش	۶۰
زنگوله	زنگوله	زنگوله	۲۰
زنگوله	زنگوله	شمش	۱۸
آلو	آلو	آلو	۱۴
پرتقال	پرتقال	پرتقال	۱۰
پرتقال	پرتقال	شمش	۸
آلبالو	آلبالو	هرشکل دیگر	۴
آلبالو	غیرازآلبالو	هرچیزدیگر	۲
غیر از حالات فوق			۱−

اگر بازیکنی یک مرتبه بازی را انجام دهد و هر گردونه بطور مستقل گردش کند امید ریاضی میزان برد را بدست آورید.

۲۶. عددی از ۱ تا ۱۰ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. شما مجاز هستید که با سؤالاتی که پاسخ آنها بله یا خیر است عدد انتخاب شده را حدس بزنید. امید ریاضی تعداد سؤالاتی که لازم است تا حدس صحیح زده شود را در هر یک از حالات زیر بدست آورید.

الف) iامین سؤال شما این باشد که «آیا عدد نوشته شده i است.» $(i = ۱, ۲, ..., ۱۰)$.

x	۱, ۲ ...	۱۰
	$\frac{1}{10}$ ...	$\frac{1}{10}$

$$Ex = \frac{1}{10}(1 + \dots + 10) = \frac{\frac{10 \times 11}{2}}{10} = 11/2$$

ب) در هر سؤال سعی کنید که نصف بقیه اعداد را که نزدیک هستند حذف کنید.

۲۷. یک مؤسسه بیمه، بیمه‌نامه‌ای را می‌نویسد که اگر در طول یکسال حادثه E اتفاق افتد بایستی مبلغ A پرداخت نماید. اگر شرکت بیمه برآورد کند که پیشامد E با احتمال p در طول یکسال اتفاق می‌افتد چه مقدار بایستی حق بیمه را تنظیم نماید تا متوسط سود شرکت ۱۰ درصد مبلغ A باشد؟

۲۸. یک نمونه ۳ تایی از قطعات داخل جعبه‌ای که شامل ۲۰ قطعه است و ۴ تای آنها معیوب هستند انتخاب می‌کنیم. امید ریاضی تعداد قطعات معیوب داخل نمونه را بدست آورید.

۲۹. برای خرابی یک دستگاه دو عامل تعیین شده است. برای تشخیص عامل اول C_1 ریال هزینه می‌شود و اگر عامل خرابی همان عامل اول باشد با هزینه R_1 ریال رفع می‌گردد. بطور مشابه این هزینه‌ها برای عامل دوم C_2 و R_2 ریال هستند. اگر p و $(1 - p)$ نشان دهنده احتمالهای خرابی توسط عاملهای ۱ و ۲ باشند. با اعمال چه شرایطی روی p، R_i و C_i $(i = 1, 2)$ بایستی ابتدا عامل اول و سپس عامل دوم را کنترل نمود (در مقابل کنترل عامل دوم وسپس عامل اول) تا اینکه میزان هزینه برگشت دستگاه به حالت عادی کارکردن حداقل شود.

تذکر: اگر اولین کنترل منفی باشد، بایستی دومین کنترل نیز انجام گیرد.

۳۰. شخصی یک سکه سالم را آنقدر پرتاب می‌کند تا برای اولین مرتبه خط ظاهر شود. اگر در nامین پرتاب خط ظاهر شود وی 2^n ریال جایزه می‌برد. فرض کنید X نشان دهنده میزان جایزه شخص باشد نشان دهید که $E[X] = \infty$ است، این مسأله به «پارادوکس سنت پترزبورگ» مشهور است.

الف) آیا مایل هستید که مبلغ یک میلیون ریال برای یک مرتبه انجام این بازی بپردازید؟

ب) آیا مایل هستید که مبلغ یک میلیون ریال را برای هر مرتبه بازی بپردازید در صورتیکه تا زمانی که مایل باشید بتوانید بازی را ادامه دهید و فقط زمان توقف را تعیین نمایید.

۳۱. هر شب هواشناس‌های متفاوت احتمال اینکه روز بعد باران بیاید را اعلام می‌کنند. برای قضاوت میزان صحت پیش‌بینی آنها به هر یک از آنها امتیازهایی بشرح زیر اختصاص می‌دهیم. اگر هواشناسی بگوید که فردا با احتمال p باران می‌آید آنگاه امتیاز او عبارت است از:

$$1 - (1 - p)^2 \quad \text{اگر باران ببارد}$$

$$1 - p^2 \quad \text{اگر باران نبارد}$$

p_X | p^* | $1-p^*$

p_X | $1-(1-p)^2$ | $1-p^2$

$EX =$ $\frac{d}{dp}EX = 0 \rightarrow p = p^*$

سپس امتیازهای او را برای یک مدت معین جمع‌آوری نموده و فردی که بالاترین امتیاز را کسب کرده باشد بهترین هواشناس شناخته می‌شود. فرض کنید یک هواشناس از این مطلب اطلاع دارد و بنابراین می‌خواهد امید ریاضی امتیاز خود را حداکثر نماید. اگر این فرد واقعاً معتقد باشد که فردا با احتمال p^* باران می‌بارد، p را چه مقدار بایستی اعلام کند تا امید ریاضی امتیاز او حداکثر شود؟

۳۲. برای بررسی اینکه یک گروه ۱۰۰ نفری دارای بیماری معینی هستند یا خیر آنها را مورد آزمایش خون قرار می‌دهیم بدین ترتیب که آنها را در گروه‌های ۱۰ نفری تقسیم نموده و نمونه خون هر ۱۰ نفر را با یکدیگر آزمایش می‌کنیم. اگر نتیجه آزمایش منفی باشد یک آزمایش برای این ۱۰ نفر کافی بوده است در حالیکه اگر نتیجه مثبت باشد هر کدام از افراد بطور جداگانه نیز آزمایش می‌شوند و جمعاً ۱۱ آزمایش انجام می‌گیرد.

فرض کنید احتمال اینکه فردی این بیماری را داشته باشد برای همه افراد بطور مستقل برابر با ۰/۱ باشد. امید ریاضی تعداد آزمایش‌های لازم برای هر گروه را بدست آورید. (توجه کنید که فرض بر این است که وقتی نتیجه آزمایش مثبت است، حداقل یک نفر دارای بیماری است.)

۳۳. یک پسر بچه روزنامه فروش روزنامه‌ها را ۱۰ ریال خریداری می‌کند و ۱۵ ریال بفروش می‌رساند و مجاز نیست که روزنامه‌های بفروش نرسیده را برگشت دهد. اگر تقاضای روزانه مشتریان دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $n = ۱۰$ و $p = \frac{۱}{۳}$ باشد. تقریباً چه تعداد روزنامه بایستی خریداری کند تا سود او حداکثر گردد؟

۳۴. در مثال ۵-۲، فرض کنید که فروشگاه بزرگ برای هر واحد کالایی که متقاضی دارد و نتواند تأمین کند نیز متحمل هزینه‌ای برابر با c گردد. (این هزینه را معمولاً هزینه ترغیب کردن می‌نامند زیرا فروشگاه رغبت مشتریانی که متقاضی هستند و نمی‌تواند پاسخ بدهد را از دست می‌دهد.) امید ریاضی میزان سود وقتی که فروشگاه به اندازه s کالا ذخیره می‌کند را بدست آورده و s را چنان تعیین کنید که امید ریاضی سود حداکثر شود.

۳۵. جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۵ مهره آبی است، دو مهره را به تصادف خارج می‌کنیم. اگر مهره‌ها از یک رنگ باشند آنگاه ۱/۱ ریال جایزه می‌گیریم و اگر از رنگهای متفاوت باشند ۱ ریال جریمه می‌شویم مطلوب است:

الف) امید ریاضی مبلغی که برنده می‌شویم.

ب) واریانس مبلغی که برنده می‌شویم.

$EX = \dots$ $VarX = \dots$

۳۶. مسأله ۲۲ را با $i = ۲$ در نظر بگیرید. واریانس تعداد بازیهایی که باید انجام شود را بدست آورده و نشان دهید که این عدد وقتی که $p = \frac{۱}{۲}$ باشد حداکثر می‌شود.

۳۷. مقدار $Var(X)$ و $Var(Y)$ را برای متغیرهای X و Y داده شده در مسأله ۲۱ بدست آورید.

۳۸. اگر $E[X] = ۱$ و $Var(X) = ۵$ باشد مطلوب است:

الف) $E[(۲ + X)^۲]$

ب) $Var(۴ + ۳X)$

۳۹. توپی را به تصادف از ظرفی که شامل ۳ توپ سفید و ۳ توپ سیاه است انتخاب می‌کنیم. بعد از انتخاب توپ آن را به ظرف برگردانده و توپ دیگری را انتخاب می‌کنیم، این کار را بطور

نامحدود تکرار می‌کنیم. احتمال اینکه از ۴ توپ انتخاب شده اول ۲ توپ سفید باشد را بدست آورید.

۴۰. در یک امتحان تستی ۳ جوابی با ۵ سؤال، احتمال اینکه دانشجویی با حدس زدن تصادفی پاسخ‌ها حداقل ۴ سؤال را درست پاسخ دهد چقدر است؟

۴۱. مردی مدعی است که تیزهوشی خارق‌العاده‌ای دارد. برای آزمایش کردن او یک سکه منظم را ۱۰ مرتبه پرتاب می‌کنیم و از او می‌خواهیم نتایج را قبل از آزمایش پیش‌بینی کند. او ۷ نتیجه از ۱۰ نتیجه را درست حدس می‌زند. احتمال اینکه وی بدون داشتن خصوصیت تیزهوشی بتواند چنین پیش‌بینی را انجام دهد، چقدر است؟

۴۲. فرض کنید موتورهای هواپیما در حال پرواز با احتمال $(1-p)$ مستقل از یکدیگر خراب می‌شوند. اگر در یک پرواز موفقیت آمیز لازم باشد اکثریت موتورهای هواپیما سالم باشند برای چه مقداری از p، یک هواپیمای ۵ موتوره مطمئن‌تر از یک هواپیمای سه موتوره است؟

۴۳. یک کانال ارتباطی که اعداد ۰ و ۱ را انتقال می‌دهد، به دلیل اشکالات موجود با احتمال ۰/۲ عدد انتقال داده شده اشتباه دریافت می‌شود. فرض کنید می‌خواهیم یک پیام مهم که شامل یک عدد دودویی است را ارسال داریم و برای کاهش شانس اشتباه بجای ۰ عدد ۰۰۰۰۰ و بجای ۱ عدد ۱۱۱۱۱ ارسال گردد. اگر دریافت کننده پیام با استفاده از اکثریت اعداد رسیده آن را بخواند. احتمال اینکه پیام اشتباه خوانده شود چقدر است؟. چه فرض استقلالی را در نظر می‌گیرید؟

۴۴. یک سیستم ماهواره‌ای از n جزء ساخته شده که اگر حداقل k جزء از آنها کار کند آنگاه سیستم فعال خواهد بود. دریک روز بارانی هر یک از اجزاء مستقل از یکدیگر با احتمال p_1 کار می‌کنند در حالیکه در یک روز غیربارانی هر کدام مستقل از یکدیگر با احتمال p_2 کار خواهند کرد. اگر احتمال باران آمدن فردا برابر با α باشد احتمال اینکه ماهواره کار کند چقدر است؟

۴۵. دانشجویی در حال آماده شدن برای شرکت در یک امتحان شفاهی است و از اینکه روز امتحان «خوش شانس» و یا «بدشانس» باشد برایش اهمیت دارد. او محاسبه کرده است که در روز خوش شانسی هر یک از امتحان کنندگان بطور مستقل با احتمال ۰/۸ او را قبول می‌کنند و در روز بدشانسی این احتمال به ۰/۴ کاهش می‌یابد. فرض کنید که برای قبول شدن بایستی اکثریت ممتحنین او را قبول کنند. اگر دانشجو احساس کند که روز امتحان، امکان بدشانس بودن او دو برابر خوش شانس بودنش است، آیا بایستی تقاضای امتحانی با ۳ ممتحن و یا تقاضای با ۵ ممتحن را داشته باشد؟

۴۶. فرض کنید برای محکوم کردن یک متهم لازم است که حداقل ۹ نفر از ۱۲ نفر اعضاء هیئت منصفه رأی به مجرم‌بودن او بدهند. همچنین فرض کنید احتمال اینکه یک عضو هیئت منصفه متهم گناهکاری را بی‌گناه تشخیص دهد برابر با ۰/۲ و احتمال اینکه متهم بی‌گناهی را گناهکار

تشخیص دهد برابر با ۰/۱ باشد اگر هر عضو بطور مُستقل رأی بدهد و ۶۵ درصد از متهمین گناهکار باشند، احتمال اینکه هیئت منصفه رأی صحیح بدهد را بدست آورید. چه درصدی از متهمین مجرم شناخته می‌شوند؟

$\%35 \sum_{i=4}^{12}\binom{12}{i}(۰/۹)^i(۰/۱)^{12-i} + \%65 \sum_{i=9}^{12}\binom{12}{i}(۰/۲)^i(۰/۸)^{12-i}$

۴۷. در بعضی از محاکمه‌های نظامی ۹ قاضی را دعوت می‌کنند و وکلای مدافع متهم و شاکی می‌توانند با هر قاضی مبارزه نموده و درصورتیکه موفق شوند او از جمع قضات کم شده و کسی جایگزین وی نمی‌شود. در پایان متهمی را مجرم می‌شناسند که اکثریت قضات رأی به مجرم بودن او بدهند و در غیر اینصورت متهم بی‌گناه شناخته می‌شود. فرض کنید وقتی که متهم واقعاً مجرم است هر قاضی بطور مستقل با احتمال ۰/۷ رأی به گناهکاری او بدهد و این احتمال برای متهمی که بی‌گناه است به ۰/۳ کاهش یابد.

$\sum_{i=5}^{9}(۰/۷)^i(۰/۳)^{9-i}$ ، $\sum_{i=5}^{9}(۰/۳)^i(۰/۷)^{9-i}$

الف) احتمال اینکه یک متهم مجرم، گناهکار تشخیص داده شود را در حالات ۹ قاضی، ۸ قاضی و ۷ قاضی بدست آورید.

$\sum_{i=5}^{8}(۰/۷)^i(۰/۳)^{8-i}$ ، $\sum_{i=5}^{8}(۰/۳)^i(۰/۷)^{8-i}$

ب) قسمت (الف) را برای یک متهم بی‌گناه محاسبه کنید.

ج) اگر وکیل مدافع شاکی مجاز به مبارزه با قضات نباشد و وکیل مدافع متهم حداکثر بتواند با ۲ قاضی مبارزه کند، چه تعداد مبارزه بایستی بین وکیل مدافع متهم و قضات صورت پذیرد در صورتیکه او ۶۰ درصد اطمینان داشته باشد که متهم گناهکار است؟

۴۸. تجربه نشان داده است که دیسکت‌های کامپیوتری تولید شده توسط یک شرکت با احتمال ۰/۰۱ مستقل از یکدیگر معیوب هستند. شرکت دیسکت‌ها را در بسته‌های ۱۰تایی بفروش می‌رساند و پیشنهاد باز پرداخت پول را با شرط مشاهده حداکثر یک معیوب در هر بسته ارائه می‌دهد. اگر فردی سه بسته از این دیسکت‌ها را خریداری کند احتمال اینکه او یک بسته را برگرداند چقدر است؟

$\binom{10}{0}(\%1)^0(\%99)^{10} + \binom{10}{1}(\%01)^1(\%99)^9 = \%91 + \%904 = \%995 = 1-$

$\binom{3}{1}p^1q^2 =$

۴۹. فرض کنید که ۱۰ درصد از تراشه‌های کامپیوتری تولید شده توسط یک شرکت تولید کننده سخت افزار معیوب باشند. اگر ۱۰۰ تراشه سفارش بدهیم، آیا تعداد تراشه‌های معیوبی راکه دریافت می‌داریم یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای است؟

۵۰. فرض کنید یک سکه اریب با احتمال p شیر ظاهر می‌شود. این سکه را ۱۰ مرتبه پرتاب می‌کنیم اگر بدانیم که ۶ شیر ظاهر شده است. احتمال شرطی اینکه نتیجه سه پرتاب اول بصورتهای زیر باشد را بدست آورید.

$P(HTT \mid 7H) = \frac{P(6H \text{ و } HTT)}{P(7H)} = \frac{21 p^7 q^4}{210 p^7 q^4} = \frac{1}{10}$

الف) H، T و T باشد (یعنی اولین پرتاب شیر، و دوپرتاب بعدی خط باشند.)

ب) T، H و T باشد. مثل الف

$HTT(HHHHHTT)$ $\binom{7}{5} = 21$

۵۱. متوسط تعداد اشتباهات تایپی در یک صفحه از یک مجله برابر با ۲ است. احتمال اینکه صفحه بعدی این مجله راکه مطالعه می‌کنید شامل: پواسون $\lambda = 2$

الف) صفر اشتباه تایپی باشد،

ب) ۲ یا بیش از ۲ اشتباه تایپی باشد،

را بدست آورده، دلیل خود را شرح دهید!

۵۲. متوسط تعداد هواپیماهای مسافربری که در ماه دچار حادثه می‌شوند در سطح جهان برابر با ۳/۵ هواپیما است. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید. پواسون

الف) در ماه آینده حداقل دو حادثه اتفاق افتد.

ب) حداکثر یک حادثه در ماه آینده اتفاق افتد.

دلیل خود را شرح دهید!

۵۳. در ایالت نیویورک تقریباً ۸۰۰۰۰ ازدواج در سال گذشته انجام گرفته است. احتمال پیشامدهای زیر را برای حداقل یک زوج برآورد نمایید.

$/6 = \frac{1}{365} \times \frac{80000}{365}$ پواسون با پارامتر

$P(X>0) = 1-P(X=0) = 1-e^{-/6}$

الف) هر دو در روز ۳۰ آوریل بدنیا آمده باشند؟

ب) هر دو در یک روز از سال بدنیا آمده باشند؟ فرضهای خود را بیان کنید.

۵۴. فرض کنید متوسط تعداد اتومبیل‌هایی که در هفته در یک بزرگراه متوقف می‌شوند برابر با ۲/۲ باشد. احتمال پیشامدهای زیر را تقریب بزنید.

$P(X=0) = e^{-2/2}$

الف) هیچ اتومبیلی در هفته آینده متوقف نشود.

$P(X \geq 2) = 1-P(X \leq 1) = 1-(e^{-2/2} + 2/2e^{-2/2}) = 1-3/2e^{-2/2}$

ب) حداقل ۲ اتومبیل در هفته آینده متوقف شوند.

۵۵. یک مؤسسه انتشاراتی ۲ ماشین نویس جدید استخدام می‌کند. ماشین‌نویس اول بطور متوسط در هر مقاله ۳ اشتباه و ماشین‌نویس دوم بطور متوسط ۴/۲ اشتباه تایپی دارند. اگر مقاله شما با شانس برابر توسط یکی از این دو ماشین‌نویس تهیه شود. احتمال اینکه مقاله هیچ غلط تایپی نداشته باشد را بدست آورید.

$P(X=0) = 1/2\,[e^{-3} + e^{-4/2}]$

۵۶. چند نفر لازم است تا احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در روز تولد شما بدنیا آمده باشد بیش از $\frac{1}{2}$ گردد؟

$1 - \frac{365 \times \cdots (365-n+1)}{365^n} > 1/2$

۵۷. فرض کنید تعداد حوادثی که در یک بزرگراه در روز اتفاق می‌افتد یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = 3$ باشد.

الف) احتمال اینکه امروز حداقل ۳ حادثه اتفاق افتد را بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را با این فرض که امروز حداقل یک حادثه اتفاق افتاده است تکرار کنید.

۵۸. تقریب پواسون را با مقدار صحیح احتمال دو جمله‌ای در حالات زیر مقایسه کنید.

الف) $p = 0/1$ ، $n = 8$ و $P\{X = 2\}$

ب) $p = ۰/۹۵$ ، $n = ۱۰$ و $P\{X = ۹\}$

ج) $p = ۰/۱$ ، $n = ۱۰$ و $P\{X = ۰\}$

د) $p = ۰/۲$ ، $n = ۹$ و $P\{X = ۴\}$

۵۹. اگر بلیط شرکت در یک بازی را برای انجام ۵۰ بازی خریداری کنید و در هر بازی، شانس برنده شدن شما $\frac{۱}{۱۰۰}$ باشد. احتمال تقریبی برنده شدن را در حالات زیر بدست آورید.

الف) حداقل یک مرتبه ب) یک مرتبه ج) حداقل دو مرتبه

۶۰. تعداد دفعاتی که یک فرد در سال دچار سرماخوردگی می‌شود یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = ۵$ است. فرض کنید داروی جدیدی که مقدار زیادی ویتامین C دارد تهیه شده بطوریکه پارامتر پواسون را برای ۷۵ درصد جامعه به $\lambda = ۳$ کاهش می‌دهد و برای بقیه ۲۵ درصد هیچ تأثیری ندارد. اگر فردی دارو را استفاده کرده و ۲ مرتبه سرماخوردگی داشته باشد با چه احتمالی دارو برای او مؤثر بوده است؟

$P(X=2) = ٪۲۵ \times \frac{e^{-5}\,5^2}{2!} + ٪۷۵ \times \frac{e^{-3}\,3^2}{2!}$

٪۷۵ مؤثر $\lambda = 3$

٪۲۵ بی‌اثر $\lambda = 5$

۶۱. *

۶۲. اگر n زوج به تصادف دور یک میز گرد نشسته باشند، احتمال اینکه هیچ مردی پهلوی همسرش نباشد را بدست آورید. وقتی که $n = ۱۰$ است، تقریب خود را با مقدار دقیق احتمال مربوطه در مثال ۵-۱۱ فصل ۲ مقایسه کنید.

۶۳. افراد با نرخ ۱ نفر در هر دو دقیقه وارد یک فروشگاه می‌شوند.

الف) احتمال اینکه هیچکس در فاصله ساعت ۰۰ : ۱۲ تا ۰۵ : ۱۲ وارد نشود را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه حداقل ۴ نفر در آن زمان وارد فروشگاه شوند را بدست آورید.

۶۴. نرخ خودکشی در یک ایالت آمریکا برابر با ۱ خودکشی در هر ۱۰۰۰۰۰ نفر در ماه گزارش شده است.

الف) احتمال اینکه در یک شهر ۴۰۰۰۰۰ نفری آن ایالت حداقل ۸ خودکشی در ماه اتفاق افتد را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه برای حداقل ۲ ماه از سال، در هر ماه حداقل ۸ خودکشی باشد را بدست آورید.

ج) اگر ماه فعلی را شماره ۱ بنامیم احتمال اینکه اولین ماهی که حداقل n خودکشی وجود دارد ماه شماره i ($i \geq ۱$)، باشد را بدست آورید. چه فرضهایی را در نظر گرفته‌اید؟

۶۵. هر یک از ۵۰۰ سرباز یک پادگان، مستقل از یکدیگر با احتمال ۰/۰۰۱ دارای بیماری خاصی

هستند. این بیماری را می‌توان با آزمایش خون تشخیص داد و لذا برای سهولت نمونه خون ۵۰۰ سرباز را مخلوط نموده و آزمایش کرده‌اند.

$\lambda = ۵۰۰ \times ۰/۰۰۱ = ۰/۵$

الف) احتمال تقریبی اینکه نتیجه آزمایش مثبت باشد، یعنی حداقل یک نفر دارای بیماری باشد را بدست آورید.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-۰/۵} = ۰/۳۹۳۵$

حال فرض کنید که نتیجه آزمایش مثبت است.

ب) با این شرط احتمال اینکه بیش از یک نفر بیمار باشند چقدر است؟

$P(X > 1 \mid X \geq 1) = \frac{P(X > 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - P(X=0) - P(X=1)}{۰/۳۹۳۵} = \frac{۰/۰۹۲}{۰/۳۹۳۵}$

فرض کنید یکی از سربازها می‌داند بیمار است.

ج) بیمار موردنظر در مورد احتمال اینکه بیش از یک نفر بیمار باشند چه ایده‌ای دارد؟

$P(X \geq 1) =$

چون نتیجه آزمایش خونهای مخلوط شده مثبت است، مسؤلین تصمیم می‌گیرند که افراد را بطور جداگانه مورد آزمایش قرار دهند. نتیجه اولین $(i - 1)$ آزمایش منفی و i امین آزمایش که روی فرد مورد نظر انجام گرفت نتیجه‌اش مثبت بود.

د) با اطلاعات فوق احتمال اینکه هر یک از افراد باقیمانده دارای بیماری باشند را بصورت تابعی از i بدست آورید.

۶۶. یک گردونه بازی که شامل ۳۸ عدد بصورت اعداد ۰ تا ۳۶ و عدد ۰۰ (دو صفر) است را در نظر بگیرید. اگر فردی همواره روی یکی از نتایج ۱ تا ۱۲ شرط‌بندی کند، احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

$\left(\frac{۲۶}{۳۸}\right)^{۵}$

الف) ۵ شرط اولیه را ببازد.

$\left(\frac{۲۶}{۳۸}\right)^{۳}\left(\frac{۱۲}{۳۸}\right)^{۱}$

ب) اولین برد او در چهارمین شرط‌بندی اتفاق افتد.

۶۷. دو تیم ورزشی یک سری بازی انجام می‌دهند و اولین تیمی که ۴ مرتبه برنده شود بعنوان برنده نهایی انتخاب می‌شود. فرض کنید یکی از تیم‌ها قوی‌تر از دیگری است بطوریکه احتمال برد آن درهر بازی مستقل از بازی‌های دیگر برابر با ۰/۶ است. احتمال اینکه تیم قوی تر i بازی را ببرد بدست آورید. این احتمال را برای $i = ۴, ۵, ۶, ۷$ محاسبه کنید. احتمال برنده نهایی شدن تیم قوی‌تر را با احتمال اینکه آن تیم ۲ بازی از ۳ بازی را ببرد مقایسه کنید.

۶۸. در مسأله ۶۷ فرض کنید که دو تیم با هم بازی کرده و احتمال برد هر تیم $\frac{1}{2}$ باشد. در این صورت امید ریاضی تعداد بازیها را بدست آورید.

۶۹. به خبرنگاری لیست افراد بانفوذی را داده‌اند که بایستی با آنها مصاحبه کند اگر خبرنگار لازم باشد که با ۵ نفر مصاحبه کند و هر فرد بطور مستقل با احتمال $\frac{2}{3}$ موافقت نماید که با او مصاحبه شود. احتمال اینکه لیست وی قادر به تأمین تعداد افراد مورد نیاز باشد را در هر یک از حالات زیر بدست آورید.

$n = ۵ \quad x = ۵$

الف) لیست شامل ۵ نفر باشد.

$P(X \geq ۵) = \binom{۵}{۵}\left(\frac{2}{3}\right)^{۵}\left(\frac{1}{3}\right)^{۰} = \frac{۳۲}{۲۴۳}$

$n=8$

$P(X\geq 5)=1-P(X<5)=1-\binom{8}{0}(\frac{2}{3})^0(\frac{1}{3})^8-\binom{8}{1}(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^7-\binom{8}{2}(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^6-\binom{8}{3}(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^5-\binom{8}{4}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^4$

$=(\frac{1}{3})^8(3^8-1-8\times 2-4\times 28-56\times 8-70\times 16)=\frac{4864}{6561}$

ب) لیست شامل ۸ نفر باشد.

برای قسمت (ب) احتمال اینکه خبرنگار بتواند با ج) ۶ نفر، د) ۷ نفر از افراد لیست مصاحبه کند چقدر است؟

$P(X=6)=\binom{8}{6}\times(\frac{2}{3})^6\times(\frac{1}{3})^2=\frac{160}{729}$

$P(X=7)=\binom{8}{7}\times(\frac{2}{3})^7\times\frac{1}{3}=\frac{160}{729}$

۷۰. یک سکه منظم را بطور متوالی پرتاب می‌کنیم تا شیر برای دهمین مرتبه ظاهر شود. اگر X نشان دهنده تعداد خط‌های ظاهر شده باشد. تابع احتمال X را بدست آورید.

$P(X=x)=\binom{n-1}{n-x}(\frac{1}{2})^{n}(\frac{1}{2})^{9}$

۷۱. مسأله کبریت باناخ (مثال ۹-۵) را وقتی که قوطی کبریت طرف چپ او از ابتدا شامل N_1 چوب کبریت و قوطی کبریت سمت راست او N_2 چوب کبریت را داشته باشد حل کنید.

۷۲. در مسأله کبریت باناخ احتمال اینکه در لحظه‌ای که قوطی اول خالی می‌شود (در مقابل کشف خالی بودن آن)، قوطی دیگر k چوب کبریت داشته باشد را بدست آورید.

۷۳. ظرفی شامل ۴ توپ سفید و ۴ توپ سیاه است. به تصادف ۴ توپ از ظرف انتخاب می‌کنیم اگر ۲ توپ سفید و ۲ توپ سیاه باشد، آزمایش را متوقف می‌کنیم در غیراینصورت توپها را به ظرف برگردانده و دوباره ۴ توپ به تصادف انتخاب می‌کنیم. این آزمایش آنقدر تکرار می‌شود، تا ۲ توپ از ۴ توپ سفید باشد. احتمال اینکه n مرتبه انتخاب توپها صورت پذیرد را بدست آورید.

۷۴. در مسأله ۶۷ احتمال شرطی پیشامدهای زیر را برای تیم قوی‌تر بدست آورید.

الف) برنده نهایی باشد بشرط اینکه تیم‌قوی‌تر اولین بازی را ببرد.

ب) اولین بازی را برده باشد بشرط اینکه برنده نهایی شده است.

۷۵. *

۷۶. در مثال ۹-۱۰ چه درصدی از i محموله معیوب توسط خریدار رد می‌شود؟ آن را برای $i=1, 4$ بدست آورید. اگر محموله‌ای رد شده باشد احتمال شرطی اینکه این محموله ۴ قطعه معیوب داشته باشد را بدست آورید.

۷۷. یک خریدار قطعات ترانزیستور، آنها را در محموله‌های ۲۰ تایی خریداری می‌کند. سیاست او این است که ازهر محموله ۴ قطعه را به تصادف انتخاب کرده و اگر همه آنها سالم باشند محموله را می‌پذیرد. اگر هر قطعه در محموله مستقل از سایر قطعات با احتمال ۰/۱ معیوب باشد چه نسبتی از محموله‌ها رد می‌شوند.

جواب $=1-\frac{\binom{4}{0}\binom{16}{4}}{\binom{20}{4}}\times 0/9$

مسائل

۱. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} c\,(۱ - x^{۲}) & -۱ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) مقدار c را بدست آورید.

ب) تابع توزیع تجمعی X چیست؟

۲. سیستمی شامل یک واحد اصلی به اضافه یک واحد پشتیبان است که می‌تواند برای یک مدت زمان تصادفی X کار کند. اگر تابع چگالی X (برحسب ماه) بصورت زیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} c\,x\,e^{-x/۲} & x > ۰ \\ ۰ & x \leq ۰ \end{cases}$$

احتمال اینکه سیستم حداقل ۵ ماه کار کند چقدر است؟

۳. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} c\,(۲x - x^{۳}) & ۰ < x < \frac{۵}{۲} \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

آیا f می‌تواند یک تابع چگالی باشد؟ در این صورت، c را تعیین کنید. مسأله را برای حالتی که $f(x)$ بصورت زیر است، تکرار کنید.

$$f(x) = \begin{cases} c\,(۲x - x^{۲}) & ۰ < x < \frac{۵}{۲} \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

۴. تابع چگالی طول عمر یک قطعه الکترونیکی (برحسب ساعت) بصورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱۰}{x^{۲}} & x > ۱۰ \\ ۰ & x \leq ۱۰ \end{cases}$$

الف) $P\{X > ۲۰\}$ را پیدا کنید.

ب) تابع توزیع تجمعی X را بدست آورید.

ج) احتمال اینکه از ۶ قطعه الکترونیکی لااقل ۳ تا برای حداقل ۱۵ ساعت کار کنند چقدر است؟ چه فرض‌هایی را در نظر می‌گیرید؟

۵. یک ایستگاه پمپ بنزین، دو هفته یک بار بنزین دریافت می‌کند. اگر حجم فروش هفتگی برحسب هزار گالن یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد:

$1-\int_0^x 5(1-t)^4\,dx$

$=1-(-(1-t)^5)_0^x$

$=(1-x)^5$

$$f(x)=\begin{cases} ۵\,(۱-x)^۴ & ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

حجم مخزن پمپ بنزین چقدر باشد، تا احتمال تمام شدن بنزین در یک هفته معین ۰/۰۱ گردد؟

$\rightarrow 1-x=(0.01)^{1/5} \rightarrow x=1-(0.01)^{1/5}$

۶. اگر تابع چگالی X بصورت های زیر باشد، $E[X]$ را محاسبه کنید.

(الف)
$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۴}x\,e^{-x/۲} & x>۰ \\ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

(ب)
$$f(x)=\begin{cases} c\,(۱-x^۲) & -۱<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

(ج)
$$f(x)=\begin{cases} \frac{۵}{x^۲} & x>۵ \\ ۰ & x\le ۵ \end{cases}$$

۷. تابع چگالی X بصورت زیر است.

$$f(x)=\begin{cases} a+bx^۲ & ۰\le x\le ۱ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

اگر $E[X]=\frac{۳}{۵}$ باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

۸. طول عمر یک لامپ الکترونیکی (برحسب ساعت) یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر است:

$$f(x)=x\,e^{-x} \qquad x\ge ۰$$