مسائل

۱. ۲ تاس منظم پرتاب شده‌اند احتمال شرطی اینکه حداقل یکی از تاس‌ها عدد ۶ ظاهر شود اگر نتیجه دو تاس متفاوت باشد چقدر است؟

۲. اگر ۲ تاس منظم پرتاب شوند. احتمال شرطی اینکه اولین تاس عدد ۶ ظاهر شود، بشرط اینکه مجموع دو تاس i باشد را بدست آورید. این احتمال رابرای i بین ۲ و ۱۲ محاسبه کنید.

۳. *

۴. احتمال اینکه حداقل در یکی از دو تاس منظم پرتاب شده عدد ۶ ظاهر شود بشرط اینکه مجموع دو تاس i باشد را بدست آورید. $(i = ۲,۳,...,۱۲)$

۵. کیسه‌ای شامل ۶ توپ سفید و ۹ توپ سیاه است. اگر ۴ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب کنیم. احتمال اینکه ۲ توپ انتخاب شده اول سفید و دو توپ انتخاب شده آخر سیاه باشند را بدست آورید.

$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{15}{2}} \times \frac{\binom{9}{2}}{\binom{13}{2}} = ۶/۹۱$

۶. ظرفی را درنظر بگیرید که در آن ۱۲ توپ قرار دارد و ۸ تای آن سفید است. یک نمونه ۴ تایی را از ظرف با جایگذاری (بدون جایگذاری) انتخاب می‌کنیم احتمال شرطی اینکه اولین و سومین توپ انتخاب شده سفید باشند بشرط اینکه نمونه انتخاب شده شامل ۳ توپ سفید باشد را بدست آورید. (در هر دو حالت)

۷. پادشاه از خانواده‌ای است که دو فرزند دارد، احتمال اینکه فرزند دیگر خانواده خواهر او باشد چقدر است؟

۸. زوجی دارای ۲ فرزند هستند. احتمال اینکه هر دو دختر باشند بشرط اینکه فرزند بزرگتر دختر است را بدست آورید.

۹. ۳ ظرف را در نظر بگیرید. ظرف A شامل ۲ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است، ظرف B شامل ۸ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است و در ظرف C یک توپ سفید و ۳ توپ قرمز قرار دارد. اگر یک توپ را به تصادف از هر ظرف انتخاب کنیم، احتمال اینکه توپ انتخاب شده از ظرف A سفید باشد بشرط اینکه ۲ توپ سفید انتخاب شده باشد را بدست آورید.

A (2W, 4R) B (8W, 4R) C (1W, 3R)

$P(\frac{2}{6}\times\frac{8}{12}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{4}{12}\times\frac{1}{4}) = \frac{7}{36}$, $\frac{7}{11}$

۱۰. *

$P = (\frac{2}{6}\times\frac{8}{12}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{4}{12}\times\frac{1}{4}+\frac{8}{12}\times\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}) = \frac{11}{36}$

۱۱. *

۱۲. شانس بارداری غیرطبیعی برای زنان بارداری که سیگاری هستند دو برابر زنان غیرسیگاری است. اگر ۳۲ درصد از زنهای سن بارداری سیگاری باشند چند درصد از زنهایی که بارداری غیرطبیعی دارند سیگاری هستند؟

$\frac{2p\times/32}{/68\,p+2p\times/32}=/48$

۱۳. ۹۸ درصد نوزادان هنگام تولد زنده هستند، ۱۵ درصد از زایمان‌ها با عمل سزارین انجام می‌گیرد و شانس زنده ماندن با عمل سزارین ۹۶ درصد است. اگر یک زن باردار به تصادف انتخاب شود

$P(\text{زنده}) = /98$

$P(\text{سزارین}) = /15$

$=\frac{/96\times/15}{/98} = /146$

$=\frac{(1-/146)\times/98}{1-/15} = /98$

و برای زایمان تحت عمل سزارین قرار نگیرد. با چه احتمالی بچه او زنده خواهد بود.

۱۴. در یک محله، ۳۶ درصد از خانواده‌ها یک اتومبیل دارند که ۲۲ درصد از آنها یک دوچرخه هم دارند، همچنین ۳۰ درصد از خانواده‌ها یک دوچرخه دارند. مطلوب است:

الف) **احتمال اینکه خانواده‌ای که به تصادف انتخاب می‌شود هم اتومبیل و هم دوچرخه داشته باشد.**

ب) احتمال شرطی اینکه یک خانواده انتخاب شده اتومبیل داشته باشد بشرط اینکه این خانواده صاحب یک دوچرخه است.

۱۵. در شهری ۴۶ درصد از رأی دهندگان خود را در گروه مستقل می‌پندارند در حالیکه ۳۰ درصد لیبرال و ۲۴ درصد محافظه‌کار هستند. در یک انتخابات محلی ۳۵ درصد از گروه مستقل، ۶۲ درصد از لیبرالها و ۵۸ درصد از محافظه‌کاران رأی داده‌اند. اگر یک رأی دهنده را به تصادف انتخاب کنیم و بدانیم که در انتخابات محلی شرکت کرده است. احتمال اینکه او،

الف) از گروه مستقل باشد.

ب) از گروه لیبرال باشد.

ج) از گروه محافظه‌کار باشد.

(٪۳۵ × ٪۴۶ + ٪۶۲ × ٪۳۰ + ٪۵۸ × ٪۲۴) × ۱۰۰ = 48.62

را بدست آورید.

د) چه نسبتی از رأی دهندگان در انتخابات محلی شرکت داشته‌اند.

۱۶. در یک کلاس ترک سیگار، ۴۸ درصد از زنها و ۳۷ درصد از مردها شرکت کرده‌اند و موفق شده‌اند که حداقل یکسال بعد از کلاس سیگار نکشند. این افراد در پایان یکسال در یک جشن شرکت می‌کنند. اگر ۶۲ درصد از شرکت کنندگان در آن کلاس مرد باشند.

الف) مطلوب است درصد زنهایی که در جشن شرکت کرده‌اند.

ب) چند درصد از افراد شرکت کننده در کلاس در جشن شرکت کرده‌اند؟

۱۷. در یک دانشکده، ۵۲ درصد از دانشجویان زن هستند. رشته اصلی ۵ درصد از دانشجویان این دانشکده،کامپیوتر است. ۲ درصد از دانشجویان زن رشته‌اصلی آنها کامپیوتر است. اگر یک دانشجو را به تصادف انتخاب کنیم. احتمال شرطی پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) این دانشجو زن باشد بشرط اینکه در رشته کامپیوتر تحصیل کند.

ب) این دانشجو در رشته کامپیوتر تحصیل کند بشرط اینکه دانشجو زن باشد.

۱۸. در مورد حقوق روزانه ۵۰۰ زوج ازدواج کرده از آنها سؤال کرده‌ایم. نتیجه اطلاعات بدست آمده در جدول زیر خلاصه شده است. یعنی مثلاً در ۳۶ زوج، زن بیشتر از ۲۵۰۰۰ ریال و شوهرش کمتر از آن درآمد دارد. مطلوب است:

زن	شوهر: کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال	شوهر: بیش از ۲۵۰۰۰ ریال
کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال	۲۱۲	۱۹۸
بیش از ۲۵۰۰۰ ریال	۳۶	۵۴

الف) احتمال اینکه یک شوهر کمترا ز ۲۵۰۰۰ ریال درآمد داشته باشد.

ب) احتمال شرطی اینکه زن بیش از ۲۵۰۰۰ ریال درآمد داشته باشد بشرط اینکه شوهر او نیز بیش از این مبلغ درآمد داشته باشد.

ج) احتمال شرطی اینکه زن بیش از ۲۵۰۰۰ ریال درآمد داشته باشد بشرط اینکه شوهر او کمتر از این مبلغ درآمد داشته باشد.

۱۹. احتمال اینکه یک باطری نو بیش از ۱۰۰۰۰ مایل کار کند برابر با ۰/۸ و احتمال اینکه بیش از ۲۰۰۰۰ مایل کار کند برابر با ۰/۴ و احتمال اینکه بیش از ۳۰۰۰۰ مایل کار کند برابر است با ۰/۱ است. اگر باطری نو یک اتومبیل بعد از ۱۰۰۰۰ مایل هنوز کار کند. مطلوب است احتمال پیشامدهای زیر:

$p(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{/۴}{/۸}=\frac{1}{2}$ (الف

الف) طول عمر این باطری بیش از ۲۰۰۰۰ مایل باشد.

ب) بقیه طول عمر آن بیش از ۲۰۰۰۰ مایل باشد.

$p(C|A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{/۱}{/۸}=\frac{1}{۸}$ (ب

* .۲۰

۲۱. ازظرفی‌که ۵ توپ سفید و ۷ توپ سیاه دارد هر مرتبه توپی را به تصادف انتخاب کرده، رنگ آن را یادداشت نموده و همراه دو توپ هم رنگ دیگر در ظرف برمی‌گردانیم احتمال پیشامدهای زیر را محاسبه کنید.

$P(B_1B_2W_1W_2)=P(B_1)\cdot P(B_2|B_1)\cdot P(W_1|B_1B_2)\cdot P(W_2|B_1B_2W_1)$

$\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۴}\times\frac{۵}{۱۶}\times\frac{۷}{۱۸}$

الف) دو توپ انتخاب شده اول سیاه و دو توپ بعدی سفید باشند.

ب) از چهار توپ انتخاب شده اول ۲ توپ سیاه انتخاب شده باشد.

۲۲. ظرف I شامل ۲ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است و ظرف II شامل ۱ توپ سفید و یک توپ قرمز است. یک توپ را به تصادف از ظرف I انتخاب نموده و در ظرف II قرار می‌دهیم و سپس یک توپ از ظرف II انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

$P(IIW)=P(IIW|IR)P(IR)+P(IIW|IW)P(IW)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$

الف) توپ انتخاب شده از ظرف II سفید باشد.

ب) توپ منتقل شده سفید باشد بشرط اینکه توپ انتخاب شده از ظرف II سفید باشد.

۲۳. چگونه ۲۰ توپ راکه ۱۰ تای آن سفید و ۱۰ تای دیگر سیاه هستند در دو ظرف قرار دهیم بطوریکه اگر یک ظرف را به تصادف انتخاب کنیم و از آن ظرف یک توپ را به تصادف بیرون

$P(IW|IIW)=\frac{P(IIW|IW)P(IW)}{//+P(IIW|IR)P(IR)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}}{\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}}=\frac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2}$

بیاوریم احتمال پیشامد اینکه توپ انتخاب شده سفید باشد، حداکثر گردد.

۲۴. هر یک از دو توپ را سیاه یا طلایی رنگ زده و در یک ظرف قرار می‌دهیم فرض کنید احتمال اینکه توپ سیاه رنگ شود $\frac{1}{2}$ است و توپها مستقل از یکدیگر رنگ شوند.

الف) اگر بدانیم که رنگ طلایی استفاده شده (حداقل یک توپ طلایی رنگ زده شده است) احتمال شرطی اینکه هر دو توپ طلایی رنگ شده باشند را بدست آورید.

ب) فرض کنید که ظرف کج شده و یک توپ از آن خارج شود و رنگ آن طلایی باشد در این حالت احتمال اینکه هر دو توپ طلایی باشند چقدر است؟ شرح دهید.

۲۵. روش زیر را برای برآورد تعداد افراد بالای ۵۰ سال در یک شهر با جمعیت ۱۰۰,۰۰۰ نفر بکار برده‌اند. «همانگونه که در خیابان راه می‌روید درصد افرادی که از کنار شما عبور می‌کنند و بالای ۵۰ سال هستند را یادداشت کنید و این عمل را چند روز تکرار کنید. آنگاه نسبت بدست آمده را در ۱۰۰,۰۰۰ ضرب کنید، تا برآورد حاصل گردد» نظر خود را درباره این روش ارائه دهید.

راهنمایی: فرض کنید p نسبت افرادی باشد که بالای ۵۰ سال هستند و در این شهر ساکنند بعلاوه فرض کنید α_1 نسبت زمانی باشد که یک فرد زیر ۵۰ سال از خیابان عبور می‌کند و α_2 همین نسبت برای افراد بالای ۵۰ سال باشد. چه کمیتی را روش مربوطه برآورد می‌کند؟ چه زمانی این کمیت تقریباً برابر با p است؟

۲۶. تصور کنید که ۵ درصد مردان و ۰/۲۵ درصد از زنان بیماری کوررنگی دارند. اگر یک فرد کوررنگ را به تصادف انتخاب کنیم. احتمال اینکه این فرد مرد باشد چقدر است؟ فرض کنید تعداد مردها و زنها برابر باشند. اگر تعداد مردها دو برابر تعداد زنها باشد پاسخ چیست؟

۲۷. دو جعبه را در نظر بگیرید که در یکی از آنها یک مهره سیاه و یک مهره سفید و در دیگری ۲ مهره سیاه و یک مهره سفید قرار دارد. یک جعبه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یک مهره را به تصادف از آن بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه این مهره سیاه باشد را بدست آورید. اگر مهره انتخاب شده سفید باشد احتمال اینکه جعبه اول انتخاب شده باشد را بدست آورید.

۲۸. لغت «سختی یا شدت» را آمریکایی‌ها بصورت *rigour* و انگلیسی‌ها بصورت *rigor* می‌نویسند. مردی که در یک هتل اقامت دارد، این لغت را می‌نویسد. یکی از حروف آن را به تصادف انتخاب کرده و مشاهده می‌کنیم که حرف صدادار است. اگر ۴۰ درصد افراد ساکن در این هتل انگلیسی و ۶۰ درصد آمریکایی باشند، احتمال اینکه نویسنده لغت انگلیسی باشد را بدست آورید.

۲۹. ظرف A شامل ۲ توپ سفید و یک توپ سیاه است و در ظرف B، ۱ توپ سفید و ۵ توپ سیاه قرار دارد یک توپ را به تصادف از ظرف A انتخاب کرده آن را در B قرار می‌دهیم. آنگاه یک توپ از ظرف B انتخاب می‌کنیم، توپ انتخاب شده سفید است. احتمال اینکه توپ منتقل شده

نیز سفید بوده باشد را بدست آورید.

۳۰. در مثال ۳-۵ فرض کنید شواهد جدید بستگی به تفسیر آن دارد و فقط ۹۰ درصد محتمل است که متهم این خصوصیت را داشته باشد. در این حالت احتمال اینکه متهم گناهکار باشد را بدست آورید. (همانند قبل فرض کنید که او این ویژگی را دارد.)

۳۱. در یک کلاس احتمال با ۳۰ دانشجو، وضعیت درس بدین صورت است که ۱۵ نفر خوب، ۱۰ نفر متوسط و ۵ نفر ضعیف هستند. در یک کلاس احتمال دیگر که آن هم ۳۰ دانشجو دارد، ۵ نفر خوب، ۱۰ نفر متوسط و ۱۵ نفر ضعیف هستند. شما (بعنوان یک کارشناس) از اعداد فوق اطلاع دارید ولی نمی‌دانید که کدام کلاس چنین وضعیت‌هایی را دارند. اگر یک دانشجو را به تصادف از هر کلاس انتخاب و آزمایش‌ساده نموده و مشاهده کنید که دانشجوی انتخابی از کلاس A متوسط و دانشجوی انتخابی از کلاس B ضعیف است. احتمال اینکه کلاس A کلاس برتر باشد چقدر است؟

۳۲. فروشگاههای A، B و C بترتیب ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰ نفر کارمند دارند از این کارمندان بترتیب ۵۰٪، ۶۰٪ و ۷۰٪ زن هستند. اگر امکان استعفا بین کارمندان یکسان باشد و یک کارمند زن استعفا دهد، با چه احتمالی وی کارمند فروشگاه C است؟

۳۳. الف) فردی در جیب خود یک سکه سالم و یک سکه که دو طرفش شیر است نگه می‌دارد. او یکی از سکه‌ها را به تصادف انتخاب و آن را پرتاب می‌کند، اگر شیر ظاهر شود با چه احتمالی سکه سالم انتخاب شده است؟

ب) فرض کنید وی همان سکه را یک مرتبه دیگر پرتاب کند و دوباره شیر ظاهر شود. حال احتمال اینکه این سکه سالم باشد چقدر است؟

۳۴. ظرف A، ۵ توپ سفید و ۷ توپ سیاه دارد، در ظرف B نیز ۳ توپ سفید و ۱۲ توپ سیاه قرار دارد. سکه‌ای را پرتاب کرده اگر شیر ظاهر شود یک توپ از ظرف A و اگر خط ظاهر شود یک توپ از ظرف B انتخاب می‌کنیم. فرض کنید که توپ انتخاب شده سفید باشد، احتمال اینکه سکه خط آمده باشد را بدست آورید.

۳۵. در مثال ۳-۱ احتمال اینکه فردی در سال دوم یک تصادف داشته باشد بشرط اینکه در سال اول، هیچ تصادفی نداشته است را بدست آورید.

۳۶. یک نمونه ۳تایی انتخاب شده بصورت زیر را در نظر بگیرید: از ظرفی که ۵ توپ سفید و ۷ توپ قرمز دارد در هر مرحله یک توپ به تصادف انتخاب نموده رنگ آن را یادداشت و آن را همراه با یک توپ از همان رنگ به ظرف باز می‌گردانیم احتمال اینکه نمونه، شامل i توپ سفید باشد را بدست آورید. $(i = ۰, ۱, ۲, ۳)$

۳۷. ظرفی شامل b توپ سیاه و r توپ قرمز است. یکی از توپها را به تصادف انتخاب می‌کنیم اما

وقتی که آن را به ظرف بر می‌گردانیم c توپ دیگر از همان رنگ را نیز در ظرف می‌گذاریم. حال فرض کنید توپ دیگری را انتخاب می‌کنیم. نشان دهید، احتمال اینکه توپ انتخاب شده اول سیاه بوده بشرط اینکه توپ دوم قرمز باشد برابر است با: $\frac{b}{b+r+c}$

۳۸. *

۳۹. سه آشپز A، B و C هر کدام کیک خاصی را تهیه می‌کند که با احتمال‌های ۰/۰۲، ۰/۰۳ و ۰/۰۵ کیک آنها هنگام پخت خراب می‌شود. اگر در رستورانی که آنها کار می‌کنند، آشپز A ۵۰ درصد، آشپز B ۳۰ درصد و آشپز C ۲۰ درصد از کیک‌ها را پخت کنند، چه نسبتی از کیک‌های خراب توسط آشپز A تهیه می‌شود.

$\frac{0.02\times0.5}{0.02\times0.5+0.03\times0.3+0.05\times0.2}\times 100 = 34.48$

۴۰. در جعبه‌ای ۳ سکه وجود دارد که یکی از آنها هر دو طرف شیر دیگری یک سکه سالم و سومی سکه‌ای اریب است که هنگام پرتاب با احتمال ۰/۷۵ شیر ظاهر می‌شود. وقتی که یکی از سکه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و پرتاب می‌کنیم، شیر ظاهر می‌شود. احتمال اینکه سکه دو طرف شیر انتخاب شده باشد چقدر است؟

$P(A|\text{شیر}) = \frac{1\times\frac{1}{3}}{1\times\frac{1}{3}+(\frac{1}{2}+\frac{3}{4})\times\frac{1}{3}} = \frac{4}{9}$

۴۱. زندانبانی به سه نفر زندانی اطلاع داده است که یکی از آنها را به تصادف برای اعدام کردن انتخاب کرده‌اند و دو نفر دیگر آزاد می‌شوند. زندانی A از زندانبان می‌خواهد که بطور خصوصی به او بگوید که کدامیک از دو نفر B و C آزاد می‌شوند و ادعا می‌کند که این اطلاع هیچگونه مشکلی را برای زندانبان بوجود نمی‌آورد زیرا حداقل یکی از دو نفر B و C آزاد خواهند شد. زندانبان تقاضای زندانی A را رد می‌کند و برای خود چنین دلیل می‌آورد که اگر A بداند که کدامیک از دو نفر B و C آزاد می‌شوند آنگاه شانس اعدام شدن خودش از $\frac{1}{3}$ به $\frac{1}{2}$ افزایش می‌یابد. زیرا وی یکی از دو نفر زندانی باقیمانده است. در مورد دلیل زندانبان چه نظری دارید؟

۴۲. فرض کنید ۱۰ سکه داریم که اگر سکه i ام را پرتاب کنیم با احتمال $\frac{i}{10}$ $(i=1,\ldots,10)$ شیر ظاهر می‌شود. وقتی که یکی از سکه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و آن را پرتاب می‌کنیم شیر ظاهر می‌شود. احتمال شرطی اینکه این سکه، پنجمین سکه باشد را بدست آورید.

۴۳. ظرفی شامل ۵ توپ سفید و ۱۰ توپ سیاه است. یک تاس را پرتاب و به تعداد عدد ظاهر شده از ظرف توپ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه همه توپهای انتخاب شده سفید باشند چقدر است؟ احتمال شرطی اینکه نتیجه پرتاب تاس عدد ۳ بوده، بشرط اینکه همه توپهای انتخاب شده سفید باشند را بدست آورید.

۴۴. دو کمد یکسان هر کدام دارای دو کشو هستند. در هر یک از کشوهای کمد A یک سکه نقره وجود دارد، اما در یکی از کشوهای کمد B یک سکه طلا و در کشوی دیگر آن یک سکه نقره است. یکی از کمدها را به تصادف انتخاب نموده یکی از کشوهای آن را باز می‌کنیم و یک سکه نقره بدست می‌آوریم. احتمال اینکه در کشوی دیگر این کمد یک سکه نقره باشد چقدر است؟

$P(A|\text{نقره}) = \frac{P(\text{نقره}|A)P(A)}{P(\text{نقره})} = \frac{P(\text{نقره}|A)P(A)}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})} = \frac{1\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$

۴۵. فرض کنید آزمایش مبتلا به بیماری سرطان برای کسانی که بیماری را دارند و کسانی که سالم هستند دارای دقت ۰/۹۵ باشد. اگر ۰/۴ درصد از افراد جامعه دارای بیماری سرطان باشند، مطلوب است احتمال اینکه فردی که مورد آزمایش قرار گرفته دارای بیماری سرطان باشد بشرط اینکه نتیجه آزمایش مثبت باشد.

۴۶. تصور کنید که یک مؤسسه بیمه افراد جامعه را به سه گروه افراد با ریسک بالا افراد با ریسک متوسط و افراد با ریسک پایین تقسیم‌بندی نموده و اطلاعات وی نشان می‌دهد که احتمال تصادف کردن این گروه‌ها در طول یکسال بترتیب ۰/۰۵، ۰/۱۵و ۰/۳۰ است. اگر ۲۰ درصد افراد جامعه ریسک بالا، ۵۰ درصد ریسک متوسط و ۳۰ درصد ریسک پایین باشند. چه نسبتی از افراد جامعه در یکسال تصادف دارند؟ اگر فرد بیمه شده A در یک سال تصادف نداشته باشد، احتمال اینکه وی از گروه با ریسک متوسط باشد را بدست آورید.

۴۷. اگر لازم باشد یک مدل ریاضی برای پیشامدهای E و F بترتیبی که در حالت‌های زیر شرح داده شده‌اند، بسازید. آیا فرض مستقل بودن آنها را در نظر می‌گیرید؟ دلیل خود را شرح دهید.

الف) E، پیشامدی است که یک زن پیشه‌ور دارای چشمان آبی باشد و F پیشامدی است که منشی او نیز چنین باشد.

ب) E، پیشامدی است که یک معلم دارای اتومبیل باشد و F پیشامدی است که نام وی در دفتر تلفن باشد.

ج) E، پیشامدی است که قد یک مرد کمتر از ۶ فوت باشد و F پیشامدی است که وزن او بیش از ۲۰۰ پوند باشد.

د) E، پیشامدی است که یک زن در آمریکا زندگی می‌کند و F پیشامدی است که او در نیمکره غربی زندگی می‌کند.

ه) E، پیشامدی است که فردا باران خواهد آمد و F پیشامدی است که پس فردا بارانی باشد.

۴۸. در یک کلاس ۴ دانشجوی پسر سال اول، ۶ دانشجوی دختر سال اول و ۶ دانشجوی پسر سال دوم ثبت نام کرده‌اند. چند دانشجوی دختر سال دوم بایستی در این کلاس ثبت نام کنند تا در صورت انتخاب یک دانشجو به تصادف، پیشامدهای جنس و سال تحصیلی مستقل باشند؟

۴۹. فرض کنید که شما بطور پیوسته تمبر جمع می‌کنید و کلاً m نوع تمبر وجود داشته باشد. همچنین فرض کنید هر مرتبه که یک تمبر جدید خریداری می‌کنید با احتمال p_i از نوع i ام $(i=1, 2, ..., m)$ است. حال اگر شما nامین تمبر را جمع‌آوری کرده باشید با چه احتمالی این تمبر جدید است؟

راهنمایی: پیشامد را روی نوع تمبر مشروط کنید.

۵۰. یک مدل ساده برای تغییرات نرخ سهام بازار بورس بدین ترتیب است که در هر روز، نرخ سهام

یک واحد با احتمال p افزایش و با احتمال $p-1$ کاهش می‌یابد. همچنین تغییرات در روزهای مختلف مستقلند.

الف) احتمال اینکه بعد از دو روز نرخ سهام همان قیمت اولیه باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه بعد از ۳ روز نرخ سهام به اندازه ۱ واحد افزایش یافته باشد چقدر است؟

ج) بشرط اینکه بعد از ۳ روز نرخ سهام یک واحد افزایش یافته باشد با چه احتمالی در اولین روز یک واحد افزایش داشته است؟

۵۱. رنگ چشم یک انسان بوسیله یک زوج ژن تعیین می‌شود. بطوریکه اگر هر دو ژن چشم، آبی باشند رنگ چشم فرد آبی و اگر هر دو ژن چشم، قهوه‌ای باشند رنگ چشم فرد قهوه‌ای و اگر یک ژن آبی و یک ژن قهوه‌ای باشد رنگ چشم قهوه‌ای خواهد بود (به این دلیل که رنگ قهوه‌ای غالب است.) یک نوزاد یک ژن را به طور مستقل از مادر و ژن دیگر را از پدر می‌گیرد، که بطور هم شانس می‌تواند ژن آبی یا ژن قهوه‌ای باشد. فرض کنید فردی والدین او دارای چشم قهوه‌ای هستند ولی خواهر آن فرد چشم آبی دارد.

الف) با چه احتمالی آن فرد مالک ژن چشم آبی است.

فرض کنید همسر آن چشم آبی باشد.

ب) احتمال اینکه اولین فرزند آنها چشم آبی داشته باشد چقدر است؟

ج) اگر اولین فرزند آنها چشمان قهوه‌ای داشته باشد با چه احتمالی فرزند بعدی آنها نیز چشم قهوه‌ای خواهد داشت.

۵۲. دو فرد A و B برای تیراندازی مسابقه می‌دهند. فرض کنید هر شلیک A با احتمال p_1 به هدف اصابت کند و هر شلیک B با احتمال p_2 به هدف بخورد. بعلاوه فرض کنید آنها بطور همزمان بطرف یک هدف تیراندازی می‌کنند اگر تیری به هدف خورده باشد مطلوب است:

الف) احتمال اینکه هر دو تیر به هدف خورده باشند.

ب) تیر A به هدف خورده باشد.

چه فرض استقلالی را در نظر گرفته‌اید.

۵۳. A و B در یک مبارزه شرکت می‌کنند. قاعده مبارزه چنین است که آنها تفنگ‌های خود را برداشته و همزمان بطرف یکدیگر شلیک می‌کنند. اگر یکی از آنها یا هر دو مورد اصابت قرار گیرند آنگاه مبارزه تمام می‌شود، اگر تیر هر دو خطا رود آنها دوباره تکرار می‌کنند. فرض کنید نتایج شلیک‌ها مستقل بوده و A با احتمال p_A و B با احتمال p_B به هدف می‌زند. مطلوب است:

الف) احتمال اینکه A به هدف نزند. $1-P_A$

ب) احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند. $P_A P_B$

ج) احتمال اینکه مبارزه بعد از n امین دوره تیراندازی تمام شود.

د) احتمال شرطی اینکه مبارزه بعد از n امین دوره تیراندازی تمام شود بشرط اینکه A مورد

اصابت قرار نگرفته باشد.

ه) احتمال شرطی اینکه مبارزه بعد از nامین دوره تیراندازی تمام شود بشرط اینکه هر دو نفر مورد اصابت قرار گرفته باشند.

۵۴. در یک مسابقه خانوادگی قرار است یک سؤال به یک زوج داده شود که پاسخ آن «صحیح» یا «غلط» است. اگر زن و شوهر بطور مستقل پاسخ مناسب را با احتمال p بدهند. کدامیک از حالات زیر برای برنده شدن زوج بهتر است؟

الف) یکی از آنها را انتخاب و اجازه دهیم او پاسخ دهد.

ب) هر دو نفر سؤال را بررسی نموده و پس از توافق، یکی از آنها پاسخ را اعلام نماید و یا اگر توافق نداشتند یک سکه را پرتاب و براساس نتیجه آن پاسخ دهند.

۵۵. در مسأله ۵۴، اگر $p = ۰/۶$ باشد و آنها روش (ب) را بکار ببرند، احتمال شرطی اینکه زوج پاسخ صحیح دهند بشرط اینکه،

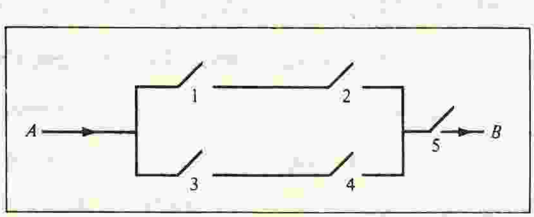
الف) آنها به توافق برسند.

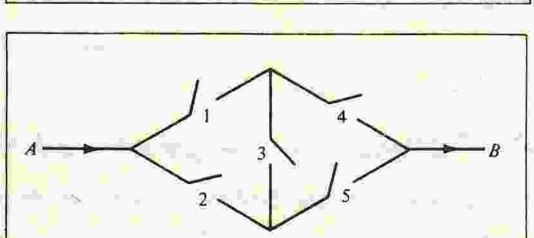
ب) آنها به توافق نرسند.

را بدست آورید.

۵۶. *

۵۷. احتمال بسته شدن رله iام $(i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵)$ در مدارهای زیر برابر با p_i است. اگر همه رله‌ها بطور مستقل عمل کنند، احتمال اینکه جریان از نقطه A به نقطه B عبور کند را در هر یک از مدارهای زیر بدست آورید.





راهنمایی: روی پیشامد اینکه رله ۳ عمل نکند مشروط کنید.

۵۸. یک سیستم مهندسی که از n جزء تشکیل شده باشد را یک سیستم «k از n» گویند، $(k \leq n)$ هرگاه کارکردن سیستم مشروط به کارکردن حداقل k جزء باشد. فرض کنید همه اجزاء بطور مستقل کار کنند.

الف) اگر iامین جزء با احتمال p_i $(i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ کار کند احتمال کار کردن یک سیستم «۲ از ۴» را بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را برای یک سیستم «۳ از ۵» تکرار کنید.

ج) اگر $p_i = p$ $(i = ۱, ۲, ..., n)$، احتمال کار کردن یک سیستم «k از n» را بدست آورید.

۵۹. یک موجود زنده دارای یک زوج از هر کدام از ۵ ژن است که آنها را با حروف الفبای انگلیسی نشان می‌دهیم. هر ژن به دو صورت ظاهر می‌شود که آنها را با حرف بزرگ و کوچک نشان داده بطوریکه حرف بزرگ نشان‌دهنده ژن غالب است. یعنی اگر موجود دارای زوج Xx باشد آنگاه شکل ظاهری بصورت ژن X است. مثلاً اگر X برای چشم قهوه‌ای و x برای چشم آبی باشد. آنگاه، موجودی که Xx یا xX را داشته باشد دارای چشم قهوه‌ای است. و موجودی که xx را داشته باشد چشمان آبی دارد. ویژگی ظاهری یک موجود را «فتوتیپ» و ساختار ژنتیکی او را «ژنوتیپ» گویند. (بنابراین دو موجود یکی با ترکیب ژنی aA، bB، cc، dD و ee و دیگری با ترکیب AA، BB، cc، DD و ee دارای ژنوتیپ‌های متفاوت بوده ولی فتوتیت‌های یکسان دارند.) در جفتگیری دو موجود هر کدام به تصادف در واگذاری یکی از زوج ژنها مشارکت دارد. در ۵ زوج ژنهای یک موجود زنده فرض می‌شود که هر کدام بطور مستقل و همچنین مستقل از ژن طرف مقابل واگذاری انجام گیرد. در یک جفت گیری بین دو موجود زنده که دارای ژنوتیپ‌های ـ aA، bB، cC، dD و eE ـ و ـ aa، bB، cc، Dd و ee ـ هستند. احتمال اینکه مولود آنها (۱) بطور فنوتیپ (۲) بطور ژنوتیپ شبیه،

الف) موجود اول باشد.

ب) موجود دوم باشد.

ج) هر دو موجود باشد. جمع هر دو

د) هیچکدام از آنها نباشد. جمع هر دو - ۱

را بدست آورید.

۶۰. با احتمال $\frac{۱}{۲}$، ملکه دارای ژن هموفیلی است. اگر او دارای ژن باشد آنگاه هر فرزند او با احتمال $\frac{۱}{۲}$ بیماری هموفیلی را خواهد داشت اگر ملکه سه فرزند سالم داشته باشد احتمال اینکه او دارای ژن هموفیلی باشد چقدر است؟ اگر ملکه فرزند چهارمی بدنیا آورد احتمال اینکه او هموفیلی باشد چقدر است؟

۶۱. در صبح روز ۳۱ سپتامبر سال ۱۹۸۲، رکورد برنده ـ بازنده سه تیم مهم در یکی از ایالت‌های

آمریکا بصورت زیر گزارش داده شده است:

تیم	برنده	بازنده
آتلانتا	۸۷	۷۲
سانفرانسیسکو	۸۶	۷۳
لوس آنجلس	۸۶	۷۳

هر تیم سه بازی باقیمانده دیگر را بایستی انجام دهد. هر سه بازی باقیمانده تیم سانفرانسیسکو با تیم لوس آنجلس است و سه بازی تیم آتلانتا با تیم سان دیاگو انجام می‌گیرد. فرض کنید نتایج بازی‌های باقیمانده مستقل از یکدیگر بوده و در هر مسابقه شانس بردن برای طرفین یکسان باشد. احتمال برد نهایی هر یک از تیم‌ها را بدست آورید. (اگر دو تیم برای مقام اول مساوی باشند بایستی یک بازی نتیجه انجام دهند که هر تیم شانس مساوی بردن را دارد.)

۶۲. شورای یک شهر متشکل از ۷ عضو است که یک گروه ۳ عضوی دارد. نظریه‌های جدید در مورد یک قانون ابتدا در گروه مطرح شده و سپس اگر حداقل ۲ نفر از ۳ نفر موافقت نمایند آن را در شورا مطرح می‌کنند. روزی قانونی در شورای شهر مطرح شد که برای تصویب نیاز به حداقل ۴ رأی مثبت داشت. حال اگر هر عضو شورا بطور مستقل با احتمال p به قانون رأی دهد. احتمال این پیشامد که رأی یکی از اعضای گروه سرنوشت ساز باشد، یعنی، اگر رأی خود را عوض کند قانون تصویب نشود را بدست آورید. این احتمال برای حالتی که عضو سرنوشت ساز از اعضای گروه نباشد چیست؟

۶۳. فرض کنید هر طفلی که بدنیا می‌آید با شانس برابر، پسر یا دختر و مستقل از جنس سایر فرزندان باشد. برای زوجی که ۵ فرزند دارند، احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

$(1/2)^5+(1/2)^5$

الف) همه فرزندان از یک جنس باشند.

$(1/2)^3(1/2)^2$

ب) ۳ فرزند بزرگتر پسر و دو نفر دیگر دختر باشند.

$\binom{5}{3}(1/2)^3(1/2)^2 = 5/16$

ج) دقیقاً ۳ فرزند پسر باشد.

$(\frac{1}{2})^2 = 1/4$

د) ۲ فرزند بزرگتر دختر باشند.

ه) حداقل یک فرزند دختر باشد.

۶۴. احتمال بردن در یک مرتبه پرتاب یک تاس برابر با p است. شخص A تاس را پرتاب می‌کند و اگر موفق نشود آن را به شخص B می‌دهد که او برای برنده شدن پرتاب کند. A و B بازی را ادامه می‌دهند، تا یکی از آنها برنده شود. احتمال برنده شدن هر کدام را بدست آورید. مسأله را برای وقتی که k بازیکن هستند تکرار کنید.

$P_A = p + q P_B$

$P_B = q P_A$

$P_A = p + q^2 P_A \longrightarrow P_A = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}$

$P_A = p_1 + q_1 q_2 P_A$

$P_A(1-q_1q_2) = p_1 \longrightarrow P_A = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$

$P_A = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$

۶۶) $P(A_H | B_T C_T) + P(A_T | B_H C_H)$

$= \frac{P(B_T C_T | A_H) P(A_H)}{P(B_T C_T)} + \frac{P(B_H C_H | A_T) P(A_T)}{P(B_H C_H)} = \frac{(1-p_1)(1-p_2) p_2 p_1}{\dots} + \frac{p_1 p_2 (1-p_1)}{p_1 p_2}$

$= p_1^2 + (1-p_1)^2 = p_1^2 + q_1^2$

۶۵. مسأله ۶۴ را با این فرض که اگر A تاس را پرتاب کند با احتمال p_1 برنده شود و اگر B تاس را پرتاب کند با احتمال p_2 برنده شود. تکرار کنید.

۶۶. سه بازیکن بطور متوالی سکه‌ای را پرتاب می‌کنند. سکه پرتاب شده توسط A، B و C بترتیب با احتمال p_1، p_2 و p_3 شیر ظاهر می‌شود. اگر یکی از بازیکن‌ها نتیجه‌ای متفاوت از دو بازیکن دیگر بدست آورد. آنگاه او به عنوان فرد تکی از بازی خارج می‌شود. اگر هیچکس تکی نباشد بازی ادامه می‌یابد تا اینکه فرد تک مشخص شود. احتمال اینکه A فرد تک باشد چقدر است؟

۶۷. فرض کنید E و F، دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش باشند. نشان دهید که اگر آزمایشهای ساده مستقل از این نوع را تکرار کنیم آنگاه E قبل از F با احتمال $P(E) / \left[P(E) + P(F)\right]$ اتفاق می‌افتد.

۶۸. وقتی که A و B سکه‌هایی را پرتاب می‌کنند، کسی که سکه‌اش به خط مشخص شده‌ای نزدیک‌تر باشد برنده است و یک ریال از دیگری دریافت می‌کند. اگر A با ۳ ریال و B با ۷ ریال بازی را شروع کنند، احتمال اینکه A همه پولها را ببرد در صورتیکه آنها مهارت یکسانی داشته باشند را بدست آورید. اگر A بازیکن بهتری باشد بطوریکه ۶۰٪ اوقات برنده شود آنگاه احتمال مربوطه را محاسبه کنید.

۶۹. در پرتاب متوالی یک جفت تاس، احتمال اینکه ۲ مرتبه پیشامد مجموع ۷ قبل از ۶ مرتبه پیشامد مجموع عدد زوج بدست آید را محاسبه کنید.

۷۰. بازیکن‌هایی با مهارت یکسان در یک مسابقه شرکت می‌کنند و احتمال اینکه یکی از دوبازیکن برنده شود برابر با $\frac{1}{2}$ است. یک گروه 2^n نفری را به تصادف بصورت زوجهایی تقسیم نموده که در مقابل یکدیگر بازی کنند. آنگاه 2^{n-1} نفر برنده را نیز بصورت زوجهای دیگری به تصادف تقسیم نموده و این کار ادامه می‌یابد تا یک نفر برنده باقی بماند. دو بازیکن یعنی A و B را در نظر گرفته و پیشامدهای A_i $(i=1,\dots,n)$ و E را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

A_i : A دقیقاً در i بازی شرکت کند

E : A و B همیشه در مقابل یکدیگر بازی می‌کنند

الف) مطلوب است $P(A_i)$ $(i=1,\dots,n)$

ب) مطلوب است $P(E)$

ج) اگر $P_n = P(E)$، نشان دهید:

$$P_n = \frac{1}{2^n - 1} + \frac{2^n - 2}{2^n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_{n-1}$$

و با استفاده از این رابطه، نتیجه بدست آمده در قسمت (ب) را کنترل کنید.

راهنمایی: $P(E)$ را با مشروط کردن روی اینکه کدامیک از پیشامدهای A_i $(i=1,2,\dots,n)$ اتفاق

می‌افتد بدست آورید. آنگاه پاسخ بدست آمده را با توجه به رابطه جبری

$$\sum_{i=1}^{n-1} ix^{i-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

ساده کنید.

برای روش دیگری جهت حل این مسأله توجه کنید که جمعاً $2^n - 1$ بازی انجام می‌گیرد.

د) توضیح دهید که چرا $2^n - 1$ بازی انجام می‌گیرد.

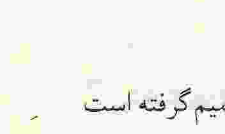
این بازیها را بشمارید و فرض کنید B_i نشان دهنده پیشامدی باشد که A و B در بازی i ام با یکدیگر بازی می‌کنند ($i = 1, \ldots, 2^n - 1$).

هـ) $P(B_i)$ مطلوب است

و) نتیجه قسمت (هـ) را برای محاسبه $P(E)$ بکار ببرید.

۷۱. یک سرمایه‌گذار در بازار بورس سهامی دارد که ارزش آن ۲۵ واحد است. او تصمیم گرفته است که سهم خود را در صورتیکه ارزش آن ۱۰ واحد کم شود و یا به ۴۰ واحد برسد بفروش برساند. اگر هر تغییر در قیمت به اندازه ۱ واحد با احتمال ۰/۵۵ افزایش و با احتمال ۰/۴۵ کاهش داشته باشد و همچنین تغییرات متوالی مستقل باشند، با چه احتمالی سرمایه‌گذار بصورت برنده بازنشست می‌شود.

۷۲. A و B به پرتاب سکه می‌پردازند، A بازی را شروع می‌کند و آنقدر ادامه می‌دهد که خط ظاهر شود. در این حالت، B پرتاب را شروع می‌کند و او نیز آنقدر پرتاب می‌کند تا خط ظاهر شود، آنگاه سکه را به A می‌دهد و به همین ترتیب بازی ادامه می‌یابد. اگر p_1 احتمال آمدن شیر توسط A و p_2 احتمال شیر آمدن توسط B باشد و برنده بازی کسی باشد که:



الف) ۲ شیر بطور متوالی بیاورد.

$P_A = p_1^2 + p_1 q_1 (q_2 + p_2 q_2) P_A + q_1(p_2 q_2 + q_2) P_A$

ب) جمعاً ۲ شیر بیاورد.

$\to P_A = ?$

ج) ۳ شیر بطور متوالی بیاورد.

د) جمعاً سه شیر بیاورد.

احتمال برنده شدن A در هر یک از حالات فوق را بدست آورید.

۷۳. تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید و تاس B دارای ۲ وجه قرمز و ۴ وجه سفید است. یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر شیر ظاهر شود بازی را با تاس A و اگر خط ظاهر شود با تاس B بازی را انجام می‌دهیم.

الف) نشان دهید که احتمال قرمز آمدن در هر پرتاب $\frac{1}{2}$ است.

ب) اگر دو پرتاب اولیه قرمز باشد احتمال اینکه نتیجه سومین پرتاب قرمز باشد چقدر است؟

$P(E) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2 = \frac{5}{18}$

4R 2W A — 2R 4W B

E = اولین دو قرمز

F = R سوم

$\to P(F|E) = \frac{3}{5}$

$P(FE) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^3 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{6}$

$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{5}{4}$

ج) اگر در دو پرتاب اولیه قرمز ظاهر شود. احتمال اینکه تاس A پرتاب شده باشد را بدست آورید.

۷۴. در ظرفی ۱۲ توپ داریم که ۴ تای آن سفید است. سه بازیکن A، B و C بطور متوالی بصورت ابتدا A سپس B و آنگاه C و دوباره A، B و C ... از ظرف یک توپ انتخاب می‌کنند. برنده کسی است که برای اولین بار توپ سفید بیرون آورد. احتمال برد برای هر بازیکن را در حالات زیر بدست آورید.

الف) هر توپ پس از انتخاب به ظرف برگردانده شود.

ب) توپهای انتخاب شده به ظرف برگردانده نشود.

۷۵. مسأله ۷۴ را بدین صورت تکرار کنید که هر بازیکن از ظرف متعلق به خود با ۱۲ توپ که ۴ تای آن سفید هستند انتخاب کند.

۷۶. فرض کنید A و B دوزیرمجموعه مستقل و هم شانس از هر یک از ۲^n زیرمجموعه $S = \{۱, ۲, ..., n\}$ باشند. نشان دهید که:

$$P\{A \subset B\} = \left(\frac{۳}{۴}\right)^n$$

راهنمایی: اگر $N(B)$ نشان دهنده تعداد عضوهای B باشد. از رابطه زیر استفاده کنید.

$$P\{A \subset B\} = \sum_{i=۰}^{n} P\{A \subset B \mid N(B) = i\} \, P\{N(B) = i\}$$

۷۷. در مثال ۵-۴ احتمال شرطی پیشامد اینکه i امین سکه انتخاب شده باشد بشرط اینکه همه n پرتاب اولیه شیر ظاهر شده است را بدست آورید.

۷۸. در قاعده توالی لاپلاس (مثال ۵-۴) آیا نتیجه پرتابهای متوالی مستقل هستند؟ شرح دهید.

۷۹. متهمی که توسط سه قاضی محاکمه می‌شود، گناهکار اعلام می‌شود اگر حداقل ۲ نفر رأی به گناهکاری او بدهند. فرض کنید وقتی که متهم واقعاً گناهکار باشد هر یک از قضات بطور مستقل با احتمال ۰/۷ رأی به گناهکاری او بدهند و هرگاه متهم واقعاً بی‌گناه باشد احتمال رأی به گناهکاری توسط هر قاضی به ۰/۲ کاهش یابد. اگر ۷۰ درصد از متهمان گناهکار باشند احتمال شرطی اینکه قاضی سوم رأی به گناهکاری بدهد را بشرط هر یک از حالات زیر بدست آورید.

الف) قاضی اول و دوم رأی به گناهکاری داده‌اند.

ب) یکی از دو قاضی اول و دوم رأی به گناهکاری و دیگری رأی به بی‌گناهی داده‌اند.

ج) قاضی اول و دوم هر دو رأی به بی‌گناهی داده‌اند.

اگر E_i $(i = ۱, ۲, ۳)$ نشان دهنده پیشامدی باشد که قاضی i ام رأی به گناهکاری بدهد. آیا این پیشامدها مستقلند؟ آیا پیشامدها بصورت مشروط مستقلند؟ (شرح دهید).